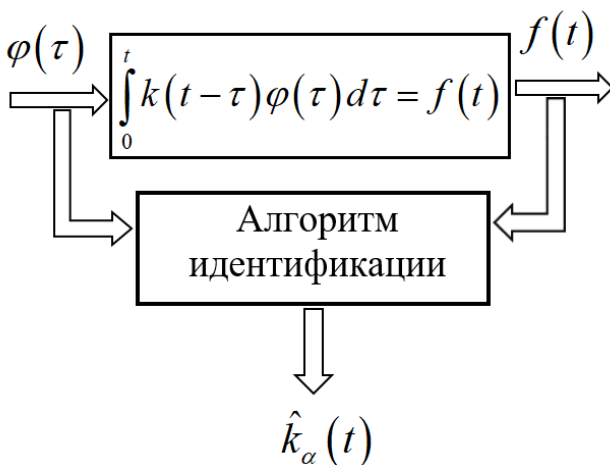




Ю.Е. ВОСКОВОЙНИКОВ

Устойчивые алгоритмы непараметрической идентификации динамических систем



НОВОСИБИРСК 2019

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО НАУКЕ И
ОБРАЗОВАНИЮ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
АРХИТЕКТУРНО-СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ (СИБСТРИН)

Ю.Е. Воскобойников

**Устойчивые алгоритмы
непараметрической идентификации
динамических систем**

Монография

НОВОСИБИРСК 2019

УДК 519.2
ББК 22.172
В 650

Воскобойников Ю. Е.

Устойчивые алгоритмы непараметрической идентификации динамических систем / Ю. Е. Воскобойников ; Новосиб. гос. архитектур.-строит. ун-т (Сибстрин). – Новосибирск : НГАСУ (Сибстрин), 2019. – 160 с.

ISBN

Монография содержит системное изложение устойчивых методов и алгоритмов решения задачи непараметрической идентификации динамических систем, математическими моделями которых являются интегральные уравнения Вольтера I рода с разностным ядром. Основное внимание уделяется построению эффективных регуляризирующих алгоритмов и выбору параметра регуляризации в случаях, когда и входной и выходной сигналы идентифицируемой системы измеряются со случайными погрешностями.

Результаты монографии будут полезны широкому кругу магистрантов, аспирантов, исследователей, занимающихся идентификацией динамических систем, обработкой экспериментальных данных и могут использоваться при преподавании учебных курсов по вычислительной математике, методам решения некорректно поставленных задач и идентификации динамических систем.

Печатается по решению научно-технического совета НГАСУ (Сибстрин)

Рецензенты:

- М.С. Соппа, д-р физ.-мат. наук, профессор кафедры физики НГАСУ (Сибстрин)
- А.А. Воевода, д-р техн. наук, профессор кафедры автоматики НГТУ

ISBN

Воскобойников Ю.Е., 2019

НГАСУ (Сибстрин), 2019

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
Глава 1. ЗАДАЧА ИДЕНТИФИКАЦИИ И НОВЫЙ УСТОЙЧИВЫЙ АЛГОРИТМ ЕЕ РЕШЕНИЯ НА ОСНОВЕ СГЛАЖИВАЮЩИХ СПЛАЙНОВ	8
1.1. Две математические модели задачи параметрической идентификации	8
1.2. Сглаживающие кубические сплайны и их построение	20
1.3. Устойчивый алгоритм непараметрической идентификации на основе сглаживающих кубических сплайнов	39
Глава 2. ЛИНЕЙНЫЕ РЕГУЛЯРИЗИРУЮЩИЕ АЛГОРИТМЫ НЕПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ	48
2.1. Дискретные последовательности и дискретное преобразование Фурье	48
2.2. Дискретные свертки последовательностей	53
2.3. Регуляризирующий алгоритм идентификации импульсной функции динамической системы	60
2.4. Свойства регуляризированных решений задачи идентификации в случае зашумленного входного сигнала	77
2.5. Оценивание числовых характеристик аддитивных шумов	88
Глава 3. НЕЛИНЕЙНЫЕ РЕГУЛЯРИЗИРУЮЩИЕ АЛГОРИТМЫ НЕПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ	95
3.1. Регуляризирующий алгоритм идентификации при высоком уровне шума входного сигнала	95

3.2. Локальный регуляризирующий алгоритм идентификации с зашумленным входным сигналом	112
3.3. Двухэтапный алгоритм идентификации	126
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	148
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	149
СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ	158

*Моим родителям
Марте Артуровне
и Евгению Константиновичу
с благодарностью
посвящаю*

ВВЕДЕНИЕ

Наиболее часто в качестве математической модели стационарной динамической системы используется интегральное уравнение Вольтера I рода с разностным ядром:

$$\int_0^t k(t-\tau)\varphi(\tau)d\tau = f(t),$$

где $k(t)$ – импульсная переходная функция (ИПФ) динамической системы (ядро интегрального уравнения), $\varphi(\tau)$, $f(t)$ – входной и выходной сигналы системы. При этом выполняется условие, которое обусловлено технической реализуемостью системы $k(t) = 0$ при $t < 0$.

С этой интегральной математической моделью связаны две задачи:

- *обратная измерительная задача*, когда необходимо построить оценку для входного сигнала $\varphi(\tau)$ по зарегистрированным значениям функции $f(t)$ и известной (или задаваемой) ИПФ $k(t)$, т.е. решить интегральное уравнение относительно функции $\varphi(\tau)$;
- *задача параметрической идентификации*, где необходимо построить оценку для ИПФ системы по зарегистрированным значениям входного и выходного сигналов $\varphi(\tau)$, $f(t)$, т.е. решить интегральное уравнение относительно ИПФ $k(t)$.

Заметим, что как первая, так и вторая задачи относятся к классу некорректно поставленных задач, когда могут нарушаться условия (одно или несколько) корректности по Адамару, в

частности, появляется неустойчивость решения интегрального уравнения к погрешностям задания правой части $f(t)$.

В данной монографии рассматривается построение устойчивых алгоритмов решения задачи непараметрической идентификации. Следует отметить, что предложенные во многочисленных публикациях различные *методы регуляризации решения некорректно поставленных задач* ориентированы для решения обратной измерительной задачи, когда требуется определить (восстановить) входной сигнал динамической системы (при известной импульсной переходной функции) и плохо адаптированы для решения задачи непараметрической идентификации. Это обусловлено следующими причинами:

- в существенной части публикаций используются детерминированные методы введения априорной информации как о самом решении, так и о погрешностях исходных данных задачи;
- предполагается, что входной сигнал идентифицируемой системы измеряется точно и только выходной сигнал измеряется (регистрируется) с некоторой погрешностью;
- необоснованно мало внимания уделяется выбору оптимального параметра регуляризации, когда входной и выходной сигнал идентифицируемой системы регистрируются со случайными погрешностями;

Поэтому в данной монографии рассмотрены регуляризирующие методы и алгоритмы, позволяющие строить устойчивые решения задачи непараметрической идентификации и в определенной степени свободные от отмеченных выше недостатков «традиционных» регуляризирующих алгоритмов.

Изложение результатов ведется в ясной, доступной для инженеров форме и, по возможности, с опусканием громоздких математических доказательств и выводов. Большое внимание уделяется содержательной трактовке и графической интерпретации излагаемых методов и алгоритмов.

Вычислительной основой предлагаемых регуляризирующих алгоритмов идентификации являются:

- *сглаживающие кубические сплайны*, для устойчивого вычисления первых производных входного и выходного сигналов идентифицируемой системы;
- *дискретное преобразование Фурье (ДПФ) и алгоритм быстрого преобразования Фурье (БПФ)*, использование которых существенно уменьшить вычислительные затраты на построение регуляризированных решений и оценивание оптимального параметра регуляризации.

Одной из основных целей монографии является представление расчетных соотношений в форме, максимально упрощающей программирование соответствующих регуляризирующих алгоритмов. Для оценивания оптимального параметра сглаживания и оптимального параметра регуляризации предлагаются алгоритмы, достаточно просто реализуемые в среде MathCAD. Рассматриваются и обсуждаются моменты, возникающие при решении практических задач идентификации. В частности, приводятся новые алгоритмы оценивания (с высокой точностью) дисперсии и относительного уровня шумов измерений входного и выходного сигналов.

Все это позволяет надеяться на востребованность изложенных в работе алгоритмов для решения практических задач идентификации технических систем.

ГЛАВА 1. ЗАДАЧА ИДЕНТИФИКАЦИИ И НОВЫЙ УСТОЙЧИВЫЙ АЛГОРИТМ ЕЕ РЕШЕНИЯ НА ОСНОВЕ СГЛАЖИВАЮЩИХ СПЛАЙНОВ

В этой главе дается определение обратной задачи непараметрической идентификации, обсуждается некорректность ее постановки. Приводятся понятия регуляризирующего алгоритма, регуляризованного решения и ошибки регуляризованного решения. Строится устойчивый алгоритм непараметрической идентификации, использующий сглаживающие кубические сплайны.

§ 1.1. Две математические модели задачи непараметрической идентификации

В этом параграфе приводятся основные понятия некорректно поставленных задач и определение регуляризирующего алгоритма их решения. Формулируются две модели записи задачи непараметрической идентификации.

1.1.1. Некорректно поставленные задачи

В ведении отмечалось, что для описания стационарной динамической системы (т.е. системы с постоянными во времени параметрами) в терминах «вход-выход» часто используется интегральное уравнение Вольтерра I рода с разностным ядром вида [49, 62, 80]

$$\int_0^t k(t-\tau)\varphi(\tau)d\tau = f(t), \quad (1.1.1)$$

Для этой модели *задача непараметрической идентификации* или *задача идентификации импульсной функции* (ИПФ) заключается в оценивании ИПФ по зарегистрированным (или заданным) значениям входного и выходного сигналов $\varphi(\tau)$, $f(t)$. С учетом условия технической реализуемости системы

$$k(t) = 0 \text{ при } t < 0 \quad (1.1.2)$$

уравнение (1.1.1) можно переписать в более удобном (для задачи идентификации) виде:

$$\int_0^t \varphi(t-\tau)k(\tau)d\tau = f(t) \quad (1.1.3)$$

Компактной записью этого интегрального уравнения является операторная форма вида

$$\Phi k = f, \quad (1.1.4)$$

где Φ – оператор, отображающий элемент k пространства K (пространство ИПФ динамической системы) в элемент f пространства F (пространство выходных сигналов идентифицируемой системы), т.е. $\Phi: K \rightarrow F$. Основная трудность решения рассматриваемой задачи идентификации связана с нарушением требований корректности по Адамару.

Французский математик Ж. Адамар в 1932 году [81] определил задачу решения операторного уравнения (1.1.4) корректно поставленной, если для каждой правой части $f \in F$ решение k :

- 1) существует;
- 2) единственно (однозначно определяется в пространстве K);
- 3) устойчиво в пространстве K , т.е. непрерывно зависит от правой части f ;

Если первые два условия понятны, то третье необходимо пояснить. Для этого воспользуемся нормами соответствующих пространств. Условие устойчивости предполагает, что для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что из неравенства

$$\|\tilde{f} - f\| \leq \delta(\varepsilon) \text{ следует } \|\tilde{k} - k\| \leq \varepsilon, \quad (1.1.5)$$

где $\tilde{k}$ – решение уравнения (1.1.4), соответствующее другой (зашумленной) правой части $\tilde{f}$. Словами это означает, что малым ошибкам задания правой части соответствуют малые ошибки построенного решения.

Задачи, не удовлетворяющие всем перечисленным выше требованиям (1–3), являются, по Адамару, *некорректно постав-*

ленными. К таким задачам относятся рассматриваемая задача идентификации импульсной переходной функции.

Идейный подход к решению некорректно поставленных задач заключается в поиска решения на некотором множестве, являющемся «сужением» исходного пространства K . Эта идея легло в основу определения корректности по Тихонову¹.

Задача решения операторного уравнения (1.1.4) называется *корректно поставленной по Тихонову*, если выполнены следующие условия [66, 67]:

1. Априори известно, что решение задачи существует и принадлежит некоторому множеству K_K пространства решений K , т.е. $k \in K_K \subset K$.

2. Решение единственно на множестве K_K , т.е. для любой правой части $f \in F_K$ существует единственный элемент $k \in K_K$. Множество F_K состоит из элементов Φk , где $k \in K_K$. В операторном виде множество F_K можно определить соотношением $F_K = \Phi K_K$.

3. Если вариации правой части не выводят ее за пределы множества F_K , то существует непрерывная зависимость решения от правой части и обратный оператор Φ^{-1} существует и он непрерывен, а, следовательно, и ограничен.

Множество K_K , на образе которого F_K оператор Φ^{-1} существует и непрерывен, называется *множеством корректности*.

Общие принципы построения множества корректности и выбора из него подходящего (по определенным критериям) решения рассматриваются в так называемых *методах регуляризации некорректно поставленных задач* [1, 2, 7, 51, 52, 58, 68, 76]. По способу заданию априорной информации методы регуляризации модно условно разделить на два больших класса: *детер-*

¹ Тихонов Андрей Николаевич – академик РАН, выдающий советский математик, пионерские работы которого явились теоретической основой для разработки методов и алгоритмов решения некорректно поставленных задач.

министические (в которых используются номы пространств) [1, 2, 51, 57, 58, 62, 66, 67, 68, 71, 73, 76] и *статистические* (в которых используются понятия теории вероятностей и математической статистики [3, 9, 15, 16, 69, 70, 84]. Некоторые из этих методов используются в последующих главах для решения рассматриваемой задачи идентификации.

1.1.2. Множество корректности и стабилизирующий функционал

Как следует из определения корректности по А.Н. Тихонову, решение уравнения

$$\Phi k = f \quad (1.1.6)$$

следует искать на множестве корректности K_K . Известные подходы к нахождению множества корректности опираются на лемму, доказанную А.Н. Тихоновым в 1943 году [66].

Пусть K_C является компактным множеством пространства K , а оператор задачи Φ осуществляет непрерывное взаимно однозначное отображение $K_C \subset K$ на множество $F_C \subset F$. Тогда и обратное отображение $F_C \rightarrow K_C$ является непрерывным.

Следовательно, приближенные решения для некорректно поставленной задачи *достаточно выбирать из компактного множества K_C* .

Для конструктивного задания компактного множества K_C на практике используют так называемый *стабилизирующий функционал*. Неотрицательный функционал $\Omega(k)$, определенный на элементах множества K , называется стабилизирующим если:

а) точное решение k принадлежит области определения функционала $\Omega(k)$;

б) для любого числа C_Ω множество K_Ω элементов k , для которых $\Omega(k) \leq C_\Omega$ является компактом в K .

Таким образом, в качестве компактного множества K_c берется множество K_Ω .

Пример 1.1.1. Построим стабилизирующий функционал для евклидова векторного пространства E^M размерности M . Для компактности множества в этом пространстве достаточно ограниченность множества. Следовательно, имеем

$$\Omega(k) = \langle k, k \rangle = \|k\|^2, \quad (1.1.7)$$

где $\langle k, k \rangle$ – скалярное произведение. В общем случае стабилизирующий функционал $\Omega(k)$ в E^M можно определить как

$$\Omega(k) = \langle W_k k, k \rangle = k^T W_k k = \|k\|_{W_k}^2, \quad (1.1.8)$$

где W_k – невырожденная симметричная матрица размера $M \times M$. Величину $\Omega(k)$ можно интерпретировать как квадрат «взвешенной» нормы вектора k .

Если взять $W_k = I_M$, где I_M – единичная матрица размера $M \times M$, то получаем компактное множество, состоящее из векторов с ограниченными проекциями, по значениям соседних проекций могут существенно отличаться по величине («негладкий» вектор).

Если определить матрицу размера $M \times M$

$$W_k = B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.1.9)$$

то на величину функционала $\|k\|_B^2$ будут влиять скачки значений проекций, но функционал «не чувствует» вектор с одинаковыми проекциями, т.е. значение функционала равно 0. Эти недостатки

устраняются, если в качестве матрицы W_k стабилизирующего функционала (1.2.3) принять матрицу

$$W_k = B + I_M.$$

В этом случае

$$\Omega_1(k) = k^T (B + I_M) k = \|k\|_B^2 + \|k\|^2, \quad (1.1.10)$$

и такой стабилизирующий функционал «чувствует» как величину проекций вектора k , так изменение амплитуды соседних проекций. ☺

Пример 1.1.2. Построим стабилизирующий функционал $\Omega(k)$ в пространстве $L_2[a, b]$ вещественных ИПФ, интегрируемых с квадратом и нормой

$$\|k\| = \left(\int_a^b k^2(t) dt \right)^{1/2} = \langle k, k \rangle^{1/2}.$$

Здесь $\Omega(k)$ можно задать в виде

$$\Omega_r(k) = \sum_{i=0}^r q_i \int_a^b \left(\frac{d^i}{dt^i} k(t) \right)^2 dt,$$

где $q_i \geq 0, q_r > 0$ – весовые множители, r – целая величина, называемая порядком регуляризации. Обычно $r = 1$, $q_0 = 1, q_1 = 1$ и тогда

$$\Omega_1(k) = \int_a^b \left[\left(\frac{dk(t)}{dt} \right)^2 + k^2(t) \right] dt.$$

При ограниченности такого функционала имеем элементы k , принадлежащие компактному множеству в пространстве непрерывных функций $C[a, b]$. ☺

Какой «физический» смысл имеет стабилизирующий функционал? Для ответа на этот вопрос предположим, что ИПФ $k(t)$ имеет Фурье-образ $K(\omega)$. Тогда

$$\Omega_1(k) = \int_{-\infty}^{\infty} (1 + \omega^2) |K(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} Q(\omega) |K(\omega)|^2 d\omega ,$$

где функцию

$$Q(\omega) = (1 + \omega^2)$$

можно назвать *частотной характеристикой стабилизирующего функционала*. Ограничение $\Omega_1(\varphi) \leq C_\Omega$ выделяет из всего пространства $L_2[a, b]$ множество дифференцируемых («гладких») ИПФ, модули Фурье-образы которых при $\omega \rightarrow \infty$ имеют асимптотику $\omega^{-(1+\gamma)}$, $\gamma > 0$, т.е. для достаточно больших ω справедливо $|\Phi(\omega)| \sim \omega^{-(1+\gamma)}$. К сожалению, при $r = 0$ (нулевой порядок регуляризации), ограниченность $\Omega_0(\varphi)$ влечет только слабую компактность множества и выделяет множество «негладких» ИПФ, которые могут иметь большие производные. Очевидно, что приближенные решения, взятые из этого множества, в большинстве случаев могут иметь осциллирующий характер и по этой причине могут не удовлетворить «эстетические» требования пользователя.

Заметим, что введение стабилизирующего функционала определяет правило отбора «гладких» решений из всего пространства K и, следовательно, *выбор стабилизирующего функционала определяет точность получаемых регуляризованных решений*.

1.1.2 Регуляризирующие алгоритмы и и ошибки регуляризованных решений

Приближенное решение операторного уравнения (1.1.6) должно:

- иметь определенную «гладкость», т.е. удовлетворять заданным ограничениям на величину стабилизирующего функционала (принадлежать компактному множеству K_C);
- быть адекватным заданной правой части операторного уравнения.

Эти два требования легли в основу вариационных подходов, где решение некорректной задачи определяется как решение вариационной задачи.

Пусть операторное уравнение (1.1.6) является системой линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), где Φ – матрица размера $N_f \times N_k$ плохо обусловлена или вырождена, k, f – векторы размерности N_k, N_f соответственно. Заметим, что такая СЛАУ получается в результате аппроксимации интегралов в интегральных уравнениях квадратурными формулами.

В методе регуляризации А.Н. Тихонова в качестве приближенного решения СЛАУ при неточно заданной правой части $\tilde{f} = f + \eta$, где η – вектор погрешностей задания правой части, принимается вектор k_α , доставляющий минимум функционалу (называемому *сглаживающим*) [66,67,68]:

$$F_\alpha(k) = \|\tilde{f} - \Phi k\|^2 + \alpha \|k\|_{W_k}^2, \quad (1.1.11)$$

где α – параметр регуляризации, а $W_k = I_{N_k}$ – единичная матрица размера $N_k \times N_k$. Заметим, что величина функционала (1.1.11) зависит от двух слагаемых: *функционала невязки* $\|\tilde{f} - \Phi k\|^2$ и *стабилизирующего функционала* $\|k\|_{W_k}^2$. Первый функционал определяет меру соответствия вектора k_α заданной правой части $\tilde{f}$, второй – меру «гладкости» вычисляемого решения, а параметр регуляризации задает вес, с которым эти два функционала влияют на величину (1.1.11). Можно доказать, что вектор k_α является решением «регуляризированной» СЛАУ вида

$$(\Phi^T \Phi + \alpha W_k) k_\alpha = \Phi^T \tilde{f}. \quad (1.1.12)$$

Эта система определяет алгоритм нахождения приближенного решения k_α .

Алгоритм называется *регуляризирующим*, если [66, 67]:

а) решение k_α существует для любой правой части $f \in F$;

б) имеет место сходимость

$$\|k_\alpha - \bar{k}\| \rightarrow 0 \text{ при } \|f - \bar{f}\| \rightarrow 0, \quad (1.1.13)$$

где $\bar{k}$ – решение СЛАУ при точной правой части $\bar{f}$. Если система (1.1.6) не имеет решения при $f = \bar{f}$, то в качестве $\bar{k}$ берут нормальное псевдорешение $\bar{k}^+$ – решение вариационной задачи [57]

$$\min_{k \in K_{МНК}} \|k\|_{W_k}^2, \quad (1.1.14)$$

где $K_{МНК}$ – множество решений метода наименьших квадратов, состоящее из векторов, доставляющих минимум функционалу $\|\bar{f} - \Phi k\|^2$. Решение k_α , построенное этим регуляризирующим алгоритмом можно назвать *регуляризованным решением исходной СЛАУ* (1.1.6)

Определим ошибку регуляризованного решения k_α вектором

$$\varepsilon_\alpha = k_\alpha - \bar{k}^+, \quad (1.1.15)$$

где $\bar{k}^+$ – нормальное псевдорешение системы (1.1.6) при точной правой части $\bar{f}$. Представим k_α в виде суммы:

$$\varepsilon_\alpha = k_\alpha - \bar{k}_\alpha^+ + \bar{k}_\alpha^+ - \bar{k}^+ = \zeta_\alpha + b_\alpha, \quad (1.1.16)$$

где

$$\zeta_\alpha = k_\alpha - \bar{k}_\alpha; \quad b_\alpha = \bar{k}_\alpha - \bar{k}^+, \quad (1.1.17)$$

$\bar{k}_\alpha$ – регуляризованное решение при точной правой части.

Вектор $b_\alpha = M_\eta[\varepsilon_\alpha]$ является неслучайным вектором, определяет *систематическую ошибку*, вносимую методом регуляризации (т.е. ошибка метода) и его можно назвать вектором смещения регуляризованного решения. Запись $M_\eta[\cdot]$ означа-

ет вычисление математического ожидания по плотности распределения случайного вектора погрешностей η регистрации правой части СЛАУ (1.1.6). Вектор систематической ошибки регуляризованного решения k_α определяется выражением

$$b_\alpha = -\alpha(\Phi^T \Phi + \alpha W_k)^{-1} W_k \bar{k}^+. \quad (1.1.18)$$

Вектор *случайной ошибки* $\zeta_\alpha = \varepsilon_\alpha - M_\eta[\varepsilon_\alpha] = \varepsilon_\alpha - b_\alpha$ определяется выражением:

$$\zeta_\alpha = (\Phi^T \Phi + \alpha W_k)^{-1} \Phi^T \eta. \quad (1.1.19)$$

Имеет нулевое среднее и ковариационную матрицу $V_\zeta = M_\eta[\zeta_\alpha \zeta_\alpha^T]$, определяемую выражением:

$$V_\zeta = \sigma_\eta^2 (\Phi^T \Phi + \alpha W_k)^{-1} \Phi^T \Phi (\Phi^T \Phi + \alpha W_k)^{-1}. \quad (1.1.20)$$

Заметим, что при $\alpha = 0$ получаем

$$V_\zeta = \sigma_\eta^2 (\Phi^T \Phi)^{-1},$$

что соответствует ковариационной матрице решения, полученного *методом наименьших квадратов*. Если матрица K плохо обусловлена, то элементы матрицы V_ζ принимают очень большие значения и, следовательно, решение обобщенного метода наименьших квадратов имеет большой уровень случайной ошибки.

Среднеквадратическую ошибку (СКО) решения k_α определим функционалом [7, 15]:

$$\Delta(\alpha) = M_\eta \left[\|k_\alpha - \bar{k}^+\|^2 \right], \quad (1.1.21)$$

и ее можно записать как:

$$\Delta(\alpha) = \|b_\alpha\|^2 + M \left[\|\zeta_\alpha\|^2 \right] = \|b_\alpha\|^2 + Sp[V_\zeta], \quad (1.1.22)$$

где $Sp[V_\zeta]$ – след ковариационной матрицы.

Замечание 1.1.1. Из соотношений (1.1.18), (1.1.19) следует основное противоречие регуляризирующих алгоритмов: при уменьшении параметра регуляризации систематическая ошибка уменьшается, но увеличивается случайная ошибка ζ_α . При увеличении α происходит обратное. ♦

Замечание 1.1.2. Из свойств монотонности зависимостей $\|b_\alpha\|^2$, $M[\|\zeta_\alpha\|^2]$ от параметра регуляризации α следует существование единственного значения α_{opt} (оптимального параметра регуляризации), при котором $\Delta(\alpha)$ достигает минимального значения. ♦

В качестве графической интерпретации двух сделанных замечаний на рис. 1.1 приведены графики зависимостей:

$$\frac{\|b_\alpha\|^2}{\|\bar{k}^+\|^2} - \text{кривая 1}; \quad \frac{M[\|\zeta_\alpha\|^2]}{\|\bar{k}^+\|^2} - \text{кривая 2}; \quad \frac{\Delta(\alpha)}{\|\bar{k}^+\|^2} - \text{кривая 3},$$

от параметра регуляризации α . Регуляризованное решение φ_α строилось для СЛАУ, матрица которой имела число обусловленности $3 \cdot 10^9$, а относительный уровень шума $\delta_\eta = \frac{\|\eta\|}{\|f\|} = 0.05$. Из рис. 1.1 видно, что оптимальный параметр регуляризации равен $\alpha_{opt} \sim 5$.

Будем говорить, что решение k_α сходятся к $\bar{k}^+$ в средне-квадратическом, если

$$\Delta(\alpha) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \sigma_\eta^2 \rightarrow 0. \quad (1.1.23)$$

Для такой сходимости (так же, как и для сходимости в других метриках) параметр α должен зависеть от дисперсии σ_η^2 , т.е. $\alpha = \alpha(\sigma_\eta^2)$.

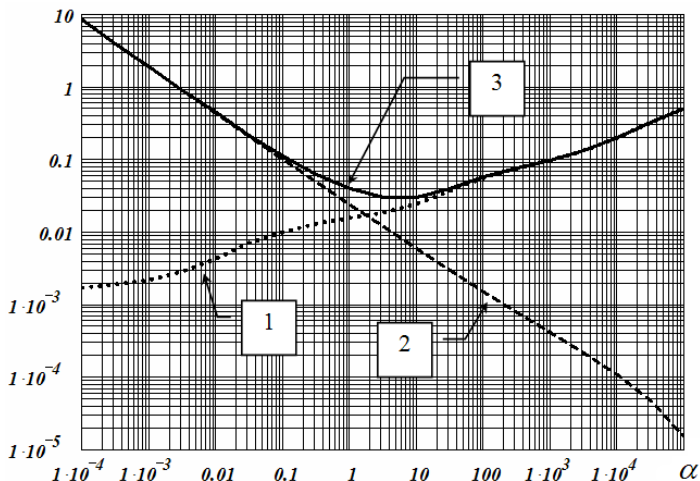


Рис. 1.1. Зависимость ошибок решения от параметра α

Таким образом, вектор k_α , определяемый (1.1.12) при соответствующем выборе параметра регуляризации и выполнении условия (1.1.13), является регуляризированным решением системы (1.1.6): *существует для любой правой части f и сходится к $\bar{k}^+$ при стремлении уровня погрешности правой части к нулю.*

1.1.4. Математические модели задачи непараметрической идентификации

Для построения устойчивого алгоритма решения задачи идентификации приведём уравнение (1.1.1) к виду уравнения задачи идентификации. При выполнении условия (1.1.2) получаем интегральное уравнение I рода вида:

$$\int_0^t \varphi(t-\tau)k(\tau)d\tau = f(t), \quad t \in [0, T_f]. \quad (1.1.24)$$

Решение этого уравнения по-прежнему остается некорректно поставленной задачей. Регуляризирующие алгоритмы решения этого уравнения будут рассмотрены в главах 2,3.

Дифференцируя уравнение по переменной t и выполнив несложные преобразования, приходим к интегральному уравнению Вольтера II рода

$$k(t) + \frac{1}{\varphi(0)} \int_0^t \varphi'(t-\tau)k(\tau)d\tau = \frac{f'(t)}{\varphi(0)}, \quad t \in [0, T_f], \quad (1.1.25)$$

решение которого уже является корректно поставленной задачей.

Однако построение алгоритма вычисления $k(t)$ из этого уравнения сталкивается со следующими основными трудностями: дифференцирование зашумлённых входного и выходного сигналов идентифицируемой системы; вычисление интеграла свёртки с наименьшими ошибками интегрирования для уменьшения общей систематической ошибки алгоритма идентификации.

Построение устойчивого алгоритма идентификации на основе уравнения (1.1.25) будет рассмотрено в этой главе ниже. Для устойчивого вычисления первой производной от входного и выходного сигналов обратимся к сглаживающим кубическим сплайнам, вычисление которых приводится в следующем параграфе.

§ 1.2. Сглаживающие кубические сплайны и их построение

В этом параграфе будут даны необходимые понятия сглаживающих кубических сплайнов и приведен вычислительный алгоритм их построения (вычисление их коэффициентов). Большое внимание уделяется выбору параметра сглаживания от которого существенно зависит ошибка дифференцирования зашумленных функций.

1.2.1. Некорректность операции дифференцирования

Операция дифференцирования в пространстве непрерывных функций является некорректно поставленной задачей. Проиллюстрируем это на простом примере.

Предположим, что на отрезке $[a, b]$ задана непрерывная функция $f(t)$, имеющая производную $z(t) = f'(t)$. Наряду с $f(t)$ рассмотрим «зашумленную» функцию $\tilde{f}(t) = f(t) + \delta \sin(\omega t)$, где слагаемое $\delta \sin(\omega t)$ можно рассматривать как шум (погрешность) задания $f(t)$. Расстояние между $\tilde{f}(t)$ и $f(t)$ определим нормой в пространстве непрерывных функций:

$$\|f(t) - \tilde{f}(t)\| = \max_{a \leq t \leq b} |f(t) - \tilde{f}(t)| = \delta. \quad (1.2.1)$$

Для производных $\varphi = f'(t)$ и $\tilde{\varphi} = \tilde{f}'(t)$ имеем

$$\|\varphi - \tilde{\varphi}\| = \max_{a \leq t \leq b} |f'(t) - \tilde{f}'(t)| = \max_{a \leq t \leq b} |\omega \delta \cos(\omega t)| = \delta \omega. \quad (1.2.2)$$

Из этого соотношения видно, что для любой сколь угодно малой величины погрешности δ выбором достаточно большого значения частоты ω можно получить сколь угодно большую ошибку дифференцирования $\varepsilon = \delta \cdot \omega$. Следовательно, нарушено третье требование корректности по Адамару.

Вопрос: можно ли сделать операцию дифференцирования устойчивой?

Ответ: да, если привлечь априорную информацию, например, об ограниченности спектра функции $f(t)$ частотой ω_0 . Пропустив функцию $\tilde{f}(t)$ через низкочастотный фильтр (что гарантирует определенную гладкость отфильтрованной функции) с частотой среза $\omega_c = \omega_0$ («затуляющий» все гармоники с частотой $|\omega| > \omega_c$) и продифференцировав, получаем

$\varepsilon = \|\tilde{z} - z\| \leq \omega_c \delta$. Таким образом, задача дифференцирования в классе функций с ограниченным спектром стала устойчивой.

К сожалению, на практике отсутствует априорная информация о «точной» частоте ω_0 и ошибка в ее задании приводит к увеличению ошибки дифференцирования. Если $\omega_0 > \omega_c$, то появляется систематическая ошибка (из-за удаления информативных составляющих функции $f(t)$), в случае $\omega_0 < \omega_c$ увеличивается случайная ошибка дифференцирования (из-за неполного удаления спектральных составляющих шума).

Реальные функция и шум имеют весьма сложные спектры (которые априори неизвестны) и это еще более усложняет операцию дифференцирования по сравнению с приведенным примером. На рис. 1.2 сплошной кривой показана «точная» производная, а точечной кривой производная, вычисленная по зашумленной функции (относительный уровень шума равен 0.02). Несмотря на небольшой уровень шума, производная имеет осциллирующую форму, которая характерна для неустойчивых решений некорректно поставленных задач.

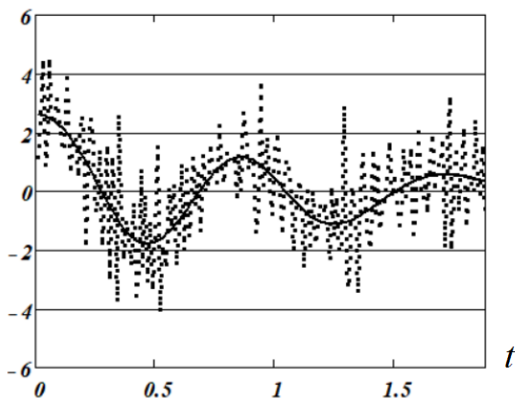


Рис. 1.2. Дифференцирование зашумленной функции

1.2.1. Построение сглаживающего кубического сплайна

Предположим, что на некотором интервале $[0, T_\varphi]$ заданы N узлов

$$0 = t_1 < t_2 < \dots < t_N = T_\varphi \quad (1.2.3)$$

и определены значения $\varphi_i = \varphi(t_i)$, $i = 1, \dots, N$ функции $\varphi(t)$ в этих узлах. Функция $S_\varphi(t)$ называется кубическим сплайном для функции $\varphi(t)$ с узлами (1.2.3), если [50]:

Свойство а) на каждом интервале $[t_i, t_{i+1})$ функция $S_\varphi(t)$ является кубическим многочленом вида:

$$S_\varphi(t) = a_i + b_i(t - t_i) + c_i(t - t_i)^2 + d_i(t - t_i)^3. \quad (1.2.4)$$

Свойство б). Функция $S_\varphi(t)$ дважды непрерывно дифференцируема на всём интервале $[0, T_\varphi]$.

Сплайн называется *интерполяционным*, если дополнительно выполняются условия интерполяции

$$S_\varphi(t_i) = \varphi_i, \quad i = 1, \dots, N. \quad (1.2.5)$$

Подсчитаем число коэффициентов интерполяционного сплайна. Каждая из $N - 1$ кубических кривых (1.2.4) определяется 4 коэффициентами: a_i, b_i, c_i, d_i . Таким образом для построения сплайна надо задать $4(N - 1)$ коэффициентов. Условия непрерывности сплайна и его первой и второй производной во внутренних узлах дают $3(N - 2)$ соотношения. Вместе с условиями интерполяции (1.2.5) получаем $4N - 6$ соотношений. Недостающие два соотношения задаются в виде ограничений на значения производных сплайна на концах интервала $[0, T_\varphi]$ (т.е. в точках t_1, t_N) и эти ограничения называются *краевыми условиями*. Подробнее о типах краевых условий см. [7, 50]. В дальнейшем будем использовать так называемые *естественные краевые условия*:

$$S''_{\varphi}(t_1) = S''_{\varphi}(t_N) = 0. \quad (1.2.6)$$

Эти условия наиболее подходят в случаях отсутствия априорной информации о значениях первой производной концах интервала $[0, T_{\varphi}]$ (это наблюдается при решении задачи идентификации).

Доказано [50], что интерполяционный сплайн с краевыми условиями (1.2.6) (будем называть *естественным интерполяционным сплайном*) является решением вариационной задачи:

$$\Omega(\varphi) = \int_{t_1}^{t_N} |\varphi''(t)|^2 dt \rightarrow \min, \quad (1.2.7)$$

т.е. обладает *минимальной кривизной* (или *максимальной гладкостью*) среди всех функций $\varphi(t)$, удовлетворяющих условиям интерполяции (1.2.5).

Серьезный недостаток интерполяционного сплайна проявляется при вычислении первой производной от зашумленной функции (т.е. когда значения функции в узлах содержат шумы (погрешности) измерений). Как было показано (см. рис. 1.2), даже небольшие по амплитуде шумы могут вызвать значительные ошибки в вычисленной (по интерполяционному сплайну) производной.

Для устойчивого вычисления производной используют сглаживающие кубические сплайны (СКС). Этот сплайн в отличие от интерполяционного сплайна проходит только в определенной близости от измеренных (с некоторой погрешностью) значений $\varphi_i, i=1, \dots, N$ и имеет большую гладкость по сравнению с интерполяционным сплайном. В качестве СКС берут такую функцию, которая обладает свойствами а), б) и доставляет минимум функционалу [7,50]:

$$F_{\alpha}(S) = \alpha \int_{t_1}^{t_N} |S''(t)|^2 dt + \sum_{i=1}^n p_i^{-1} (\varphi_i - S(t_i))^2, \quad (1.2.8)$$

где $p_i^{-1} \geq 0, i=1, \dots, N$ - весовые множители, α - параметр сглаживания, принимающий значение из интервала $[0, \infty)$. Доказано [50], что кубический сплайн с естественными условиями (1.2.6)

доставляет минимум функционалу (1.2.8) и такой сплайн единственен (обозначим его как $S_{\varphi, \alpha}(t)$). Сравнивая (1.2.8) и функционал (1.1.11), минимум которого определяет регуляризованное решение СЛАУ (1.1.6), видим схожесть по форме записи этих двух функционалов: присутствует функционал невязки (в (1.2.8) это $\sum_{i=1}^n p_i^{-1}(\varphi_i - S(t_i))^2$) и стабилизирующий функционал (в (2.1.8) - $\int_{t_1}^{t_N} |S''(t)|^2 dt$), определяющий гладкость построенного СКС.

Как видно из (1.2.8), сглаживающий сплайн не проходит через значения φ_i и поэтому он используется для фильтрации (сглаживания) зашумлённых значений. Параметр сглаживания α «управляет» степенью сглаживания зашумленных данных (или степенью фильтрации шума исходных данных):

- при $\alpha = 0$ сглаживающий сплайн становится интерполяционным (т.е. проходит через все заданные точки φ_i и фильтрация шума отсутствует);
- при $\alpha \rightarrow \infty$ сглаживающий сплайн вырождается в прямую линию (эффект переглаживания зашумленных данных, когда вместе с шумом удаляются информативные (полезные) составляющие «точного» (не зашумленного) сигнала).

Сразу заметим, что выбор параметра сглаживания из условия минимума ошибки сглаживания является основной проблемой, с которой приходится сталкиваться при построении СКС на практике. В параграфе 1.3 будут рассмотрены разные алгоритмы выбора параметра сглаживания и сделан анализ оптимальности выбираемых параметров сглаживания.

1.2.3. Алгоритм вычисления коэффициентов СКС

Алгоритмы вычисления коэффициентов сглаживающего кубического сплайна для разных краевых условий и при заданном параметре сглаживания α подробно изложен в [7,50]. Здесь

рассматривается алгоритм вычисления коэффициентов естественного СКС с краевыми условиями (1.2.6). Обозначим задаваемые (измеренные) значения функции как $\tilde{\varphi}_i$, $i=1,...,N$, и $h_i = t_{i+1} - t_i$, $i=1,...,N-1$. Введем следующие коэффициенты:

$$\lambda_i = \frac{h_{i-1} + h_i}{3} + \alpha \left(\frac{p_{i-1} + p_i}{h_{i-1}^2} + \frac{p_{i+1} + p_i}{h_i^2} + \frac{2p_i}{h_i h_{i-1}} \right), i=2,...,N-1;$$

$$\mu_1 = \frac{h_1}{6} - \alpha \left(\frac{p_1}{h_1^2} + \frac{p_2}{h_1} \cdot \left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} \right) \right);$$

$$\mu_i = \frac{h_i}{6} - \frac{\alpha}{h_i} \left(p_i \cdot \left(\frac{1}{h_{i-1}} + \frac{1}{h_i} \right) + p_{i+1} \cdot \left(\frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_{i+1}} \right) \right), i=2,...,N-2;$$

$$\mu_{N-1} = \frac{h_{N-1}}{6} - \alpha \left(\frac{p_N}{h_{N-1}^2} + \frac{p_{N-1}}{h_{N-1}} \cdot \left(\frac{1}{h_{N-2}} + \frac{1}{h_{N-1}} \right) \right);$$

$$\beta_i = \alpha \frac{p_{i+1}}{h_i h_{i+1}}, \quad i=1,...,N-2;$$

$$D_i = \frac{\tilde{\varphi}_{i+1} - \tilde{\varphi}_i}{h_i} + \frac{\tilde{\varphi}_{i-1} - \tilde{\varphi}_i}{h_{i-1}}, i=2,...,N-1.$$

Введем неизвестные величины вторых производных в узлах сетки: $M_i = \varphi''(t_i)$, $i=1,...,N$. С учетом краевых условий (1.2.6) имеем: $M_1=0$, $M_N=0$. Для вычисления оставшихся $N-2$ значений M_i запишем следующую систему уравнений [7]:

$$\begin{aligned} \lambda_2 M_2 + \mu_2 M_3 + \beta_2 M_4 &= D_2; \\ \mu_2 M_2 + \lambda_3 M_3 + \mu_3 M_4 + \beta_3 M_5 &= D_3; \\ \beta_{i-2} M_{i-2} + \mu_{i-1} M_{i-1} + \lambda_i M_i + \mu_i M_{i+1} + \beta_i M_{i+2} &= D_i, \quad i=4,...,N-3; \\ \beta_{N-4} M_{N-4} + \mu_{N-3} M_{N-3} + \lambda_{N-2} M_{N-2} + \mu_{N-2} M_{N-1} &= D_{N-2}; \\ \beta_{N-3} M_{N-3} + \mu_{N-2} M_{N-2} + \lambda_{N-1} M_{N-1} &= D_{N-1}. \end{aligned} \quad (1.2.9)$$

Отметим одну особенность сформированной системы линейных алгебраических уравнений (1.2.9). Напомним, что квад-

ратная матрица $A = \{a_{i,j}\}$ размером $N \times N$ называется *матрицей с диагональным преобладанием*, если выполняются условия:

$$|a_{i,i}| \geq \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|, \quad i = 1, \dots, N.$$

Матрицы с диагональным преобладанием всегда не вырождены и, следовательно, система уравнений с такой матрицей имеет единственное решение. К сожалению, при больших значениях параметра сглаживания возможна потеря матрицей системы (1.2.9) свойства диагонального преобладания. В этом случае можно использовать *метод немонотонной прогонки*, численная реализация которого обсуждается в [50]. Не останавливаясь на изложении метода, заметим, что число вычислительных операций, необходимых для решения систем из N уравнений не превышает $30(N-1)$, т.е. метод имеет высокую вычислительную эффективность.

После нахождения всех N величин M_i переходим к вычислению значений СКС в узлах t_i (коэффициенты a_i в представлении (1.2.4)):

$$\begin{aligned} a_1 &= S_{\varphi, \alpha}(t_1) = \tilde{\varphi}_1 - \alpha p_1 M_2 / h_1; \\ a_i &= S_{\varphi, \alpha}(t_i) = \tilde{\varphi}_i - \alpha p_i \left(\frac{M_{i+1} - M_i}{h_i} - \frac{M_i - M_{i-1}}{h_{i-1}} \right), \quad i = 2, \dots, N-1; \\ a_N &= S_{\varphi, \alpha}(t_N) = \tilde{\varphi}_N - \alpha p_N M_{N-1} / h_{N-1}. \end{aligned}$$

Затем вычисляются оставшиеся коэффициенты СКС:

$$\begin{aligned} b_i &= \frac{a_{i+1} - a_i}{h_i} - h_i \frac{M_{i+1} + 2M_i}{6}, \quad i = 1, \dots, N-1; \\ c_i &= \frac{M_i}{2}; \quad d_i = \frac{M_{i+1} - M_i}{6h_i}, \quad i = 1, \dots, N-1. \end{aligned}$$

Таким образом, изложенные соотношения позволяют вычислить все коэффициенты СКС при заданных весовых множителях p_i и

параметре сглаживания α . Выбор этих величин рассматривается ниже.

1.2.4. Весовые множители СКС и алгоритм оценивания оптимального параметра сглаживания

Предположим, что задаваемые (измеренные) значения функции допускают следующее представление:

$$\tilde{\varphi}_i = \varphi(t_i) + \xi_i, \quad i = 1, \dots, N, \quad (1.2.10)$$

где ξ_i - случайная погрешность (шум) регистрации значений сигнала $\varphi(t)$ в узлах (1.2.3). При этом средние значения ξ_i равны нулю, т.е. $M[\xi_i] = 0$, $i = 1, \dots, N$, а дисперсии равны $\sigma_{\xi_i}^2$.

Весовые множители $p_i \geq 0$ задают (при фиксированном α) степень близости сплайна к заданным значениям $\tilde{\varphi}_i$. Чем меньше величина p_i , тем ближе сплайн $S_{\varphi, \alpha}(t)$ будет подходить к значениям $\tilde{\varphi}_i$. Дадим некоторые рекомендации по заданию весовых множителей.

Если все измерения равноточны, т.е. шумы измерения ξ_i имеют одинаковую дисперсию $\sigma_{\xi_i}^2 = \sigma_{\xi}^2$, $i = 1, \dots, N$, то можно задать:

$$p_1 = p_2 = \dots = p_{N-1} = p_N = \text{const} > 0. \quad (1.2.11)$$

Если некоторым измерениям отдается предпочтение (в силу их более высокой точности), то соответствующие этим измерениям веса p_i выбираются меньшими по сравнению с весами для других измерений. Если дисперсия $\sigma_{\xi_i}^2$ шума измерения ξ_i заданы, то рекомендуется задать:

$$p_i = \text{const} \cdot \sigma_{\xi_i}^2. \quad (1.2.12)$$

Таким образом, выбор весовых множителей позволяет «индивидуально» учесть точность каждого измерения (если в этом есть необходимость).

Перейдем к выбору параметра сглаживания и этот выбор должен удовлетворять двум очевидным требованиям:

- *условию сходимости*, которое можно определить, как

$$\lim \max_i |S_{\varphi, \alpha}(t_i) - \varphi(t_i)| = 0 \quad \text{при} \quad \sum_{i=1}^N \sigma_{\xi_i}^2 \rightarrow 0; \quad (1.2.13)$$

- *минимизировать ошибку сглаживания* в принятой метрике при конечных значениях дисперсий шума измерения.

В качестве меры ошибки сглаживания примем *среднеквадратическую ошибку* (СКО), которую определим следующим функционалом:

$$\Delta(\alpha) = M \left[\left\| \hat{S}_{\varphi, \alpha} - \varphi \right\|^2 \right], \quad (1.2.14)$$

где $M[\cdot]$ - математическое ожидание по распределению вектора ξ шума измерений, $\hat{S}_{\varphi, \alpha}, \varphi$ - векторы с N проекциями, составленные из значений $S_{\varphi, \alpha}(t_i), \varphi(t_i), i=1, \dots, N$, $\|\cdot\|$ - евклидова норма вектора. Значение параметра сглаживания, минимизирующего СКО сглаживания (1.2.14) назовем *оптимальным параметром* и обозначим как α_{opt} . В работе [7] показано, что для вычисления α_{opt} требуется априорная информация о функции $\varphi(t)$, которая на практике отсутствует, например, значения $\varphi(t_i), i=1, \dots, N$. Поэтому обращаются к алгоритмам выбора параметра сглаживания, которые могли бы с приемлемой погрешностью оценить α_{opt} . Один из таких алгоритмов попробуем построить на основе *критерия оптимальности линейного алгоритма фильтрации*. Этот критерий построен в работах [7, 22] и поэтому здесь приведем только основные соотношения этого критерия, необходимые для дальнейших построения алгоритма выбора параметра сглаживания. Заметим, что этот критерий оказался очень полезным для оценивания оптимальных пара-

метров различных алгоритмов фильтрации, включая нелинейные алгоритмы вейвлет-фильтрации [20,20,22,23,24,25,27,28]. Приведем основные положения этого критерия.

Обозначим через T оператор фильтрации, действующий из N - мерного векторного пространства зашумленных векторов $\tilde{\varphi} = \varphi + \xi$ в N - мерное векторное пространство отфильтрованных векторов $\hat{\varphi}_T$, т.е. $\hat{\varphi}_T = T\tilde{\varphi}$. Наша задача найти такой матричный оператор T_{opt} , который бы минимизировал СКО, определяемую функционалом и зависящую от оператора фильтрации T :

$$\Delta(T) = M \left[\|\hat{\varphi}_T - \varphi\|^2 \right]. \quad (1.2.15)$$

Введем в рассмотрение вектор невязки:

$$e(T) = \tilde{\varphi} - \hat{\varphi}_T = \tilde{\varphi} - T\tilde{\varphi} = (I - T)\tilde{\varphi} = E(T)\tilde{\varphi}.$$

где I – единичная матрица размера $N \times N$. В работах [7,22] доказано

Утверждение 1.2.1. Необходимым и достаточным условие оптимальности линейного оператора фильтрации T , строящего $\hat{\varphi}_T = T\tilde{\varphi}$, где $\varphi = \varphi + \xi$, является матричное тождество:

$$V_e(T) = V_\xi E^T(T), \quad (1.2.16)$$

где $V_e(T) = M \left[e(T) \cdot e^T(T) \right]$ – матрица вторых моментов вектора невязки, $V_\xi = M \left[\xi \cdot \xi^T \right]$ – ковариационная матрица вектора шума ξ . ▼

К сожалению, матричное тождество (1.2.16) нельзя непосредственно использовать для построения оптимального оператора и его можно использовать для ответа на вопрос: оптимален или не оптимален построенный оператор фильтрации, и в этом смысле (1.2.16) можно рассматривать как *критерий оптимальности линейного алгоритма фильтрации*. Заметим, что условие (1.2.16) не входит априорная информация об «точном» векторе

φ (например, в виде матрицы вторых моментов «точного» вектора (подробнее см. [7,21])).

Теперь предположим, что оператор фильтрации зависит от некоторого параметра α , т.е. $T(\alpha)$. Применение изложенного выше критерия оптимальности для вычисления α_{opt} параметрического оператора фильтрации $T(\alpha)$ связано с двумя трудностями.

Во-первых, оценка матрицы вторых моментов $V_e(\alpha)$, вычисленная по одной реализации вектора невязки $e(\alpha) = \tilde{\varphi} - \hat{\varphi}_\alpha$, где $\hat{\varphi}_\alpha = T(\alpha)\tilde{\varphi}$, для проверки тождества (1.2.16) из-за малой точности оценивания. *Во-вторых*, в силу параметризации оператора T условие (1.2.16) становится только достаточным. Действительно, найдется величина α , доставляющее минимум СКО, но при этом α не будет точно выполняться тождество (1.2.16). Следовательно, целесообразно в качестве α_{opt} взять такое значение α_w , при котором принимается основная статистическая гипотеза:

$$H_0 : V_e(\alpha) = V_\xi E^T(\alpha). \quad (1.2.17)$$

В качестве альтернативной гипотезы примем гипотезу

$$H_1 : V_e(\alpha) \neq V_\xi E^T(\alpha). \quad (1.2.18)$$

Альтернативная гипотеза принимается, если невыполнение тождества (1.2.16) обусловлено не случайными ошибками, возникающими из-за оценивания $V_e(\alpha)$ по одной реализации, а систематическими, обусловленными не оптимальностью параметра сглаживания. Таким образом, значение α_w можно рассматривать как оценку оптимального параметра сглаживания α_{opt} .

Для проверки гипотезы (1.2.17) введем статистику [7, 22, 25]

$$\rho_w(\alpha) = e^T(\alpha) [V_\xi E^T(\alpha)]^{-1} e(\alpha). \quad (1.2.19)$$

Существование матрицы $[E^T(\alpha)]^{-1}$ позволяет переписать $\rho_w(\alpha)$ в виде

$$\rho_w(\alpha) = \tilde{f}^T V_\xi^{-1} e(\alpha). \quad (1.2.20)$$

Утверждение 1.2.2. Если ковариационная матрица V_ξ не вырождена, то:

а) для любого $\alpha \geq 0$ статистика $\rho_w(\alpha)$ есть сумма квадратов N случайных величин;

б) для значений α_w , при которых принимается гипотеза (1.2.17), математическое ожидание

$$M[\rho(\alpha_w)] = N. \quad (1.2.21)$$

Первое свойство $\rho_w(\alpha)$ непосредственно следует из (1.2.19). Для доказательства второго используем выражение

$$M[\rho_w(\alpha)] = Sp \left[(V_\xi E^T(\alpha))^{-1} M[e(\alpha) e^T(\alpha)] \right],$$

справедливое для любого $\alpha \geq 0$. Для $\alpha = \alpha_w$ имеем

$$M[\rho_w(\alpha)] = Sp \left[(V_\xi E^T(\alpha))^{-1} (V_\xi E^T(\alpha)) \right] = Sp[I] = N,$$

где I – единичная матрица размера $N \times N$. ▼

Доказанные свойства статистики $\rho_w(\alpha)$ позволяют аппроксимировать распределение $\rho_w(\alpha)$ при $\alpha = \alpha_w$ χ_N^2 -распределением с N степенями свободы. Тогда проверка гипотезы (2.18) сводится к проверке предположения: *подчиняется ли величина $\rho_w(\alpha)$ χ_N^2 -распределению с N степенями свободы.* Для этого построим интервал

$$\Theta(\beta) = [\mathcal{G}_{N,\beta/2}, \mathcal{G}_{N,1-\beta/2}], \quad (1.2.22)$$

где $\mathcal{G}_{N,\beta/2}$ – квантиль χ_N^2 -распределения уровня $\beta/2$. Если $\rho_w(\alpha)$ попадает в интервал (1.2.22), т.е. выполняется неравенство

$$\mathcal{G}_{N,\beta/2} \leq \rho_w(\alpha) \leq \mathcal{G}_{N,1-\beta/2}, \quad (1.2.23)$$

то гипотеза (1.2.17) может быть принята с вероятностью ошибки первого рода, равной β (обычно $\beta = 0.05$), и значение α_w , при котором выполняется (1.2.17), является оценкой для α_{opt} .

Вернемся к выбору параметра сглаживания СКС на основе рассмотренного критерия оптимальности. Предположим, что шум ξ_i имеет нулевое среднее и дисперсию $\sigma_{\xi_i}^2$. Введем вектор невязки $e(\alpha)$ с проекциями $e_i(\alpha) = \tilde{\varphi}(t_i) - S_{\varphi,\alpha}(t_i)$, $i = 1, \dots, N$, а также статистику:

$$\rho_w(\alpha) = \sum_{i=1}^N \frac{e_i(\alpha) \tilde{\varphi}_i}{\sigma_{\xi_i}^2}. \quad (1.2.24)$$

Вычисление оценки α_w сводится к решению нелинейного уравнения

$$\rho_w(\alpha) = N \quad (1.2.25)$$

итерационными алгоритмами. В качестве α_w принимается очередное приближение $\alpha^{(n)}$, которое удовлетворяет неравенству (1.2.23). Такое правило останова итерационной процедуры позволяет использовать для решения уравнения (1.2.25) «медленные» процедуры (например, метод дихотомии).

Если число узлов N превышает значение 30 (это на практике бывает весьма часто), то для вычисления квантилей $\mathcal{G}_{N,\beta/2}$, $\mathcal{G}_{N,1-\beta/2}$ при $\beta = 0.05$ рекомендуется использовать формулы

$$\mathcal{G}_{N,0.025} = N - 1.96\sqrt{2N}; \quad \mathcal{G}_{N,0.975} = N + 1.96\sqrt{2N}, \quad (1.2.26)$$

которые хорошо аппроксимирует соответствующие квантили χ_N^2 -распределения

Для доказательства сходимости СКС с параметром сглаживания α_w обратимся к неравенству

$$\begin{aligned} |S_{\varphi, \alpha_w}(t_i) - \varphi(t_i)| &\leq |S_{\varphi, \alpha_w}(t_i) - \tilde{\varphi}(t_i)| + |\tilde{\varphi}(t_i) - \varphi(t_i)| \\ &= |e_i(\alpha_w)| + |\xi_i| \end{aligned} \quad (1.2.27)$$

Так как границы интервала (1.2.22) не зависят от дисперсий шума, то из (1.2.24) следует, что $|e_i(\alpha)|$ должна стремиться к нулю с такой же скоростью, что и $\sigma_{\xi_i}^2 \rightarrow 0$, т.е. по порядку $|e_i(\alpha)| \sim \sigma_{\xi_i}^2$. Так как $|\xi_i| \sim \sigma_{\xi_i}$, то оба слагаемых в правой части неравенства (1.2.27) стремятся к нулю при $\sigma_{\xi_i}^2 \rightarrow 0$, что доказывает сходимость сглаживающего сплайна.

Обобщая выше сказанное, можно сказать, что СКС с параметром сглаживания α_w является регуляризующим алгоритмом для задачи дифференцирования зашумленных значений функции. При фиксированном параметре сглаживания СКС является линейным алгоритмом фильтрации шума.

Заметим, что в работе [8] был предложен подход к выбору параметра сглаживания исходя из требуемой ширины «аппаратной» функции СКС.

1.2.5. Исследования эффективности СКС для устойчивого дифференцирования зашумленных сигналов

Для исследования эффективности параметра сглаживания α_w как оценки для оптимального параметра α_{opt} был выполнен многочисленный эксперимент. Обсуждение этих результатов

приведено в [4,7]. Остановимся только на результатах некоторых экспериментов.

В первой серии экспериментов исследовалось вопрос о свойствах критерия оптимальности для построения оценки для α_{opt} . В качестве тестового сигнала была взята функция, показанная на рис. 1.3 сплошной линией.

Значения этой функции в узлах сетки (количество узлов $N=90$) искажались нормально распределенным шумом ξ_i с нулевым средним и одинаковой дисперсией $\sigma_{\xi_i}^2 = \sigma_{\xi}^2$, значение которой вычислялась по задаваемому относительному уровню шума, определяемый выражением:

$$\delta_{\xi} = \frac{\|\xi\|}{\|\phi\|} = \frac{\|\tilde{\phi} - \phi\|}{\|\phi\|}.$$

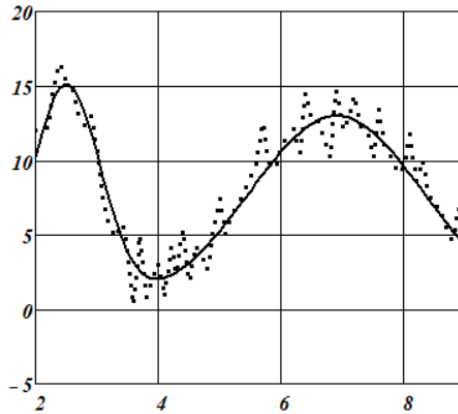


Рис. 1.3. Точные и зашумленные значения тестовой функции

Точность фильтрации шума (т.е. точность сглаживания зашумленных данных) определялась относительной ошибкой сглаживания:

$$\delta_{\varphi}(\alpha) = \frac{\|\hat{S}_{\varphi,\alpha} - \varphi\|}{\|\varphi\|}, \quad (1.2.28)$$

где $\hat{S}_{\varphi,\alpha}, \varphi$ - векторы, составленные из значений СКС и точной функции $\varphi(t)$ в узлах сетки. На рис. 1.4 показаны значения относительной ошибки $\delta_{\varphi}(\alpha)$ (сплошная кривая), график функции $\rho_w(\alpha)$ (штриховая кривая), а также границы $\mathcal{G}_{90,0.025}, \mathcal{G}_{90,0.975}$, вычисленные по формулам (1.2.26) (точечные прямые). В этом вычислительном эксперименте относительный уровень шума задавался $\delta_{\varepsilon} = 0.12$. Видим, что все значения α_w (для которых значения $\rho_w(\alpha)$ попадают в интервал (1.2.22)) находятся в области минимума относительной ошибки сглаживания. Из этого же рисунка видно, что в качестве α_w может быть принято и другое значение, для которого $\rho_w(\alpha_w)$ попадает в интервал (1.2.22) – это является *обязательным условием* для оценки α_w . Такая неоднозначность в вычислении α_w является следствием процедуры проверки статистической гипотезы (1.2.17) и характерна для многих методов проверки статистических гипотез.

На рис. 1.5 точечной кривой показаны значения СКС, построенного по зашумленным значениям тестовой функции (см. рис. 1.2) при $\alpha_w = 7 \cdot 10^{-3}$ и $p_i = 10^{-2}, i=1, \dots, N=90$. Относительной ошибкой сглаживания $\delta_{\varphi}(\alpha_w) = 0.056$.

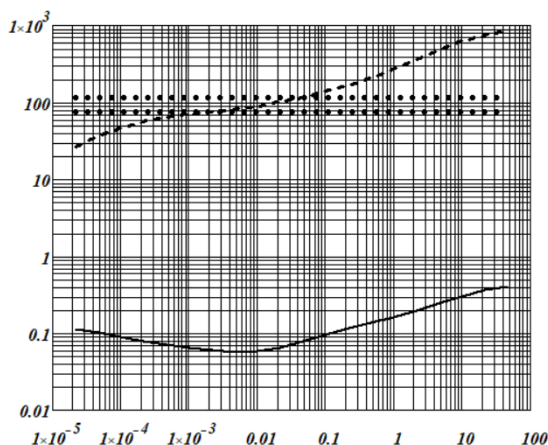


Рис. 1.4 К выбору параметра сглаживания α_w

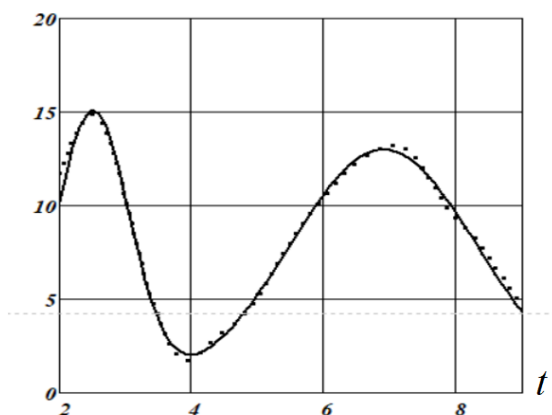


Рис. 1.5. Значения тестовой функции и СКС

На рис. 1.6 приведен график точной производной (сплошная линия) и производной СКС (точечная кривая). Видно достаточно хорошее совпадение этих двух кривых. Относительная ошибка дифференцирования равна 0.128, которая более чем на порядок меньше ошибки дифференцирования без сглаживания (производная интерполяционного сплайна).

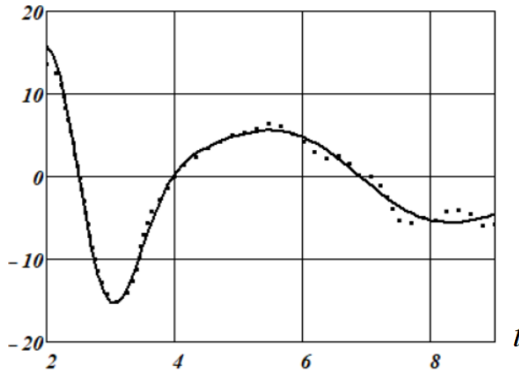


Рис. 1.6. Значения производных тестовой функции и СКС

Вторая серия экспериментов отвечала на вопрос: насколько увеличивается ошибка сглаживания СКС, построенного при значении параметра $\alpha = \alpha_w$ по сравнению с СКС, построенным при оптимальном параметре сглаживания α_{opt} (при котором ошибка сглаживания минимальна)? Для ответа на этот вопрос обратимся к коэффициенту эффективности, который был введен для алгоритмов выбора параметра регуляризации [11, 15, 16]. Коэффициент эффективности параметра сглаживания α_w определим выражением:

$$E_w = \frac{\left\| \hat{S}_{\varphi, \alpha_{opt}} - \varphi \right\|}{\left\| \hat{S}_{\varphi, \alpha_w} - \varphi \right\|}. \quad (1.2.29)$$

Этот коэффициент является случайной величиной, принимающей значения из интервала $(0, 1]$. Значения близкие к единице (например, $0.9 \div 0.95$) говорят о небольшом проигрыше по точности, значения меньше 0.5 указывают на значительное (по сравнению с оптимальным СКС) увеличение ошибки сглаживания сплайном $S_{\varphi, \alpha_w}(t)$. Зная числовые характеристики (среднее значение, минимальное и максимальное значения и т.д.) этой

случайной величины, можно говорить о применимости предложенного алгоритма выбора параметра сглаживания.

Рассмотрим некоторые результаты исследований приведенных выше алгоритмов выбора с использованием коэффициента эффективности (1.2.29). Для определения числовых характеристик этого коэффициента был выполнен вычислительный эксперимент по фильтрации сигнала, представленного на рис. 1.2.

Вычислялась выборка значений $E_W^{(n)}$ объемом $N_{sam} = 100$. Значение $E_W^{(n)}$ вычислялось по решению $S_{\varphi, \alpha_W}^{(n)}(t)$ с параметром сглаживания $\alpha_W^{(n)}$, который был выбран по зашумленной реализации $\tilde{\varphi}^{(n)} = \varphi + \xi^{(n)}$, $n = 1, 2, \dots, N_{sam}$. Все реализации шума $\xi^{(n)}$ имели одинаковые статистические характеристики. По выборке определялись: минимальное $\min_{E_W}$ и среднее m_{E_W} значения, а также строилась гистограмма частот $\omega_W^{(i)} = n_i / N_{sam}$, где n_i – число значений $E_W^{(n)}$, попавших в i -й интервал (количество интервалов 7). На рис. 1.7 показана гистограмма частот $\omega_W^{(i)}$, типичная для алгоритма выбора параметра регуляризации на основе критерия оптимальности (уровень шума $\delta_\xi = 0.05$). Видно, что все значения случайной величины E_W находятся в интервале $[0.84, 1.0]$.

В табл. 1.1 приведены числовые характеристики коэффициента E_W для разных уровней шума. Первая строка соответствует случаю, когда проекции ξ_i вектора шума не коррелированы, вторая строка (серый фон) – коэффициент корреляции равен 0.2. Анализ таблицы показывает, что коррелированность шума почти не приводит к уменьшению коэффициента эффективности (хотя относительная ошибка сглаживания возрастает).

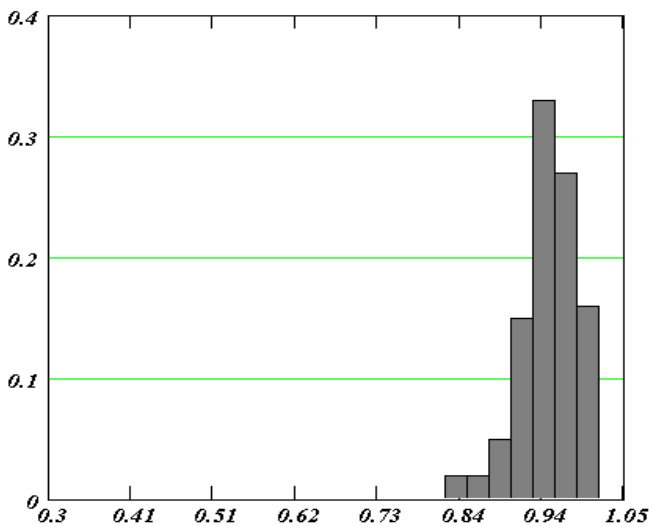


Рис. 1.7. Гистограмма частот коэффициента
эффективности E_W

Таблица 1.1

Относительный уровень шума	$\min_{E_W}$	m_{E_W}
0.01	0.831	0.962
	0.830	0.960
0.05	0.842	0.955
	0.840	0.952
0.10	0.851	0.961
	0.848	0.959
0.15	0.841	0.959
	0.836	0.955

Обобщая результаты табл. 1.1, можно сделать следующий вывод: *при заданной величине дисперсии σ_ξ^2 целесообразнее использовать в качестве параметра сглаживания оценку α_w* . В работе [7] показано, что другие алгоритмы выбора дают

значения параметра сглаживания с худшими значениями коэффициента эффективности (в частности, метод перекрестной значимости – cross-validation method [78, 79, 106]), который весьма чувствителен к наличию даже небольшой корреляции (коэффициент корреляции $0.2 \div 0.4$) между значениям шумов ξ_i .

Замечание 1.2.1. Если дисперсия σ_{ξ}^2 неизвестна или известна с большой погрешностью, то алгоритм, предложенный в параграфе 2.5 позволяет оценить дисперсию с высокой точностью (порядка несколько процентов). Такая точность вполне приемлема для выбора параметра сглаживания на основе изложенного критерия оптимальности. ♦

§ 1.3 Устойчивый алгоритм непараметрической идентификации на основе сглаживающих кубических сплайнов

В этом параграфе будет построен устойчивый алгоритм идентификации реализующий формулу (1.1.25). Для устойчивого вычисления первой производной входного и выходного сигнала используются сглаживающие кубические сплайны с параметрами сглаживания α_w , вычисляемые на основе критерия оптимальности. Заметим, что СКС успешно использовался для вычисления производной зашумленной функции в алгоритме обращения уравнения Абеля (подробнее см. [5]).

1.3.1. Построение устойчивого алгоритма идентификации

Для нахождения приближенного решения уравнения (1.1.25) выполним его дискретизацию (т.е. переход к конечно-мерному аналогу) при предположениях:

- входной и выходной сигналы идентифицируемой системы регистрируются на интервале $[0, T]$ и на этом интервале находятся точки измерений (узлы сетки):

$$t_1 = 0, t_2, t_3, \dots, t_{N-1}, t_N = T.$$

Часто используют сетку с равноотстоящими узлами:

$$t_i = (i-1) \cdot \frac{T}{N-1}, \quad i = 1, \dots, N,$$

где N - количество узлов;

- измеренные (заданные) значения входного и выходного сигналов допускают представления:

$$\tilde{\varphi}_i = \varphi(t_i) + \xi_i; \quad \tilde{f}_i = f(t_i) + \eta_i, \quad i = 1, \dots, N; \quad (1.3.1)$$

- шумы измерения ξ_i, η_i - являются случайными величинами с нулевыми средними и дисперсиями $\sigma_\xi^2, \sigma_\eta^2$ соответственно.

На первом этапе нахождения решения по этим зашумленным значениям строятся сглаживающие кубические сплайны с производными $S'_{\varphi, \alpha_W}(t), S'_{f, \alpha_W}(t)$ соответственно. Параметры сглаживания как первого, так и второго сплайнов вычислялись на основе критерия оптимальности, изложенного в предыдущем параграфе. После таких построений уравнение (1.1.25) перепишем в виде:

$$k(t) + \frac{1}{S'_{\varphi, \alpha_W}(t_1)} \int_0^t S'_{\varphi, \alpha_W}(t - \tau) k(\tau) d\tau = \frac{S'_{f, \alpha_W}(t)}{S'_{\varphi, \alpha_W}(t_1)}, \quad (1.3.2)$$

$$t \in [0, T_f].$$

Далее, обратимся к интегралу свёртки, входящему в это уравнение. Для его дискретизации предположим, что на каждом интервале $[t_i, t_{i+1})$ $k(t)$ постоянно и равно $\hat{k}_i = k(t_i)$, $i = 1, \dots, N-1$. Тогда интеграл свёртки в (1.3.2) будем аппроксимировать суммой [44]:

$$\int_0^{t_j} S'_{\varphi, \alpha_W}(t_j - \tau) k(\tau) d\tau \simeq \sum_{i=1}^{j-1} k_i \left[\int_{t_i}^{t_{i+1}} S'_{\varphi, \alpha_W}(t_j - \tau) d\tau \right], \quad j = 2, \dots, N \quad (1.3.3)$$

Введем в рассмотрение матрицу Φ' размером $(N-1) \times (N-1)$ с элементами:

$$\Phi'_{i,j} = \begin{cases} \int_{t_j}^{t_{j+1}} S'_{\varphi,\alpha}(t_{i+1} - \tau) d\tau, & \text{если } j \geq i; \\ 0, & \text{если } j < i, \end{cases} \quad (1.3.4)$$

где $i=1, \dots, N-1$; $j=1, \dots, N-1$. Штрих в обозначении матрицы указывает, что ее элементы вычисляются через первую производную СКС. Можно доказать следующее равенство:

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} S'_{\varphi,\alpha_W}(t_j - \tau) d\tau = \int_{t_k}^{t_{k+1}} S'_{\varphi,\alpha_W}(\tau) d\tau, \quad (1.3.5)$$

где $i+1 \leq j$ и $k = j - i$. С учетом этого равенства элементы матрицы (1.3.4) можно переписать в виде:

$$\Phi'_{i,j} = \begin{cases} \int_{t_{i+1-j}}^{t_{i+2-j}} S'_{\varphi,\alpha}(\tau) d\tau, & \text{если } j \leq i; \\ 0, & \text{если } j > i, \end{cases} \quad (1.3.6)$$

где $i=1, \dots, N-1$, $j=1, \dots, N-1$. Используя представление (1.2.5), интеграл от производной $S'_{\varphi,\alpha}(\tau)$ СКС при вычислении элементов матрицы Φ' (см. (1.3.6)) можно определить по формуле:

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} S'_{\varphi,\alpha_W}(\tau) d\tau = b_k + 2c_k(t_{k+1} - t_k) + 3d_k(t_{k+1} - t_k)^2, \quad (1.3.7)$$

где $k = i+1-j$, что существенно упрощает вычисление элементов матрицы Φ' .

Замечание 1.3.1. Заметим, что полученная квадратурная формула (1.3.7) позволяет достаточно точно и эффективно вычислять значения интегралов, тем самым уменьшая методическую ошибку предлагаемого алгоритма дискретизации, осу-

щественного перехода от бесконечномерного уравнения (1.3.2) к его конечномерному аналогу (см. (1.3.8)). ♦

Сформируем векторы

$$\hat{f}' = \begin{bmatrix} S'_{f, \alpha_w}(t_1) \\ \vdots \\ S'_{f, \alpha_w}(t_{N-1}) \end{bmatrix}; \quad k = \begin{bmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_{N-1} \end{bmatrix}.$$

Тогда уравнение (1.3.2) можно аппроксимировать следующей системой линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) вида:

$$\left(I + \frac{1}{S_{\varphi, \alpha_w}(t_1)} \Phi' \right) k = \frac{1}{S_{\varphi, \alpha_w}(t_1)} \hat{f}', \quad (1.3.8)$$

где I – единичная матрица размером $(N-1) \times (N-1)$. Решая эту систему, получаем вектор k , проекции которого являются оценками для значений $k(t_i)$, $i = 1, \dots, N-1$ идентифицируемой ИПФ системы.

Замечание 1.3.2. СЛАУ (1.3.8) имеет хорошо обусловленную матрицу (число обусловленности матрицы системы не больше 3-5), и точность идентификации определяется только ошибками дифференцирования входного (элементы матрицы Φ') и выходного (проекция вектора $\hat{f}'$) сигналов. Вычисление параметра сглаживания в используемых сглаживающих сплайнов на основе критерия оптимальности дает определенную уверенность в минимальных ошибках вычисления производных от зашумленных входного и выходного сигналов идентифицируемой системы. ♦

1.3.2. Результаты численных исследований алгоритма идентификации

Для проверки работоспособности и эффективности предложенного алгоритма идентификации был проведен многочисленный вычислительный эксперимент [44]. Остановимся только на результатах одной серии исследований.

В качестве $k(t)$ была взята ИПФ колебательного звена второго порядка (на рис. 1.8а - сплошная кривая). Значения входного и выходного сигналов искажались случайными нормально распределенными погрешностями с относительными уровнями:

$$\delta_{\xi} = \frac{\|\tilde{\Phi} - \Phi\|}{\|\Phi\|} = \frac{\|\xi\|}{\|\Phi\|}, \quad \delta_{\eta} = \frac{\|\tilde{f} - f\|}{\|f\|} = \frac{\|\eta\|}{\|f\|},$$

где Φ, f - векторы, составленные из точных значений сигналов, $\tilde{\Phi}, \tilde{f}$ - векторы из зашумленных значений входного и выходного сигналов, $\|\cdot\|$ - евклидова норма вектора.

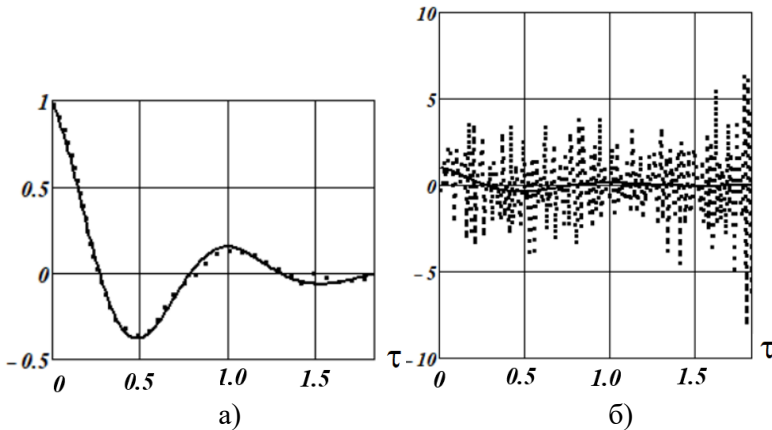


Рис. 1.8. ИПФ системы и ее неустойчивая оценка

Ошибка идентификации определялась относительной величиной:

$$\delta_k = \frac{\|\hat{k} - k\|}{\|k\|}. \quad (1.3.9)$$

На рис. 1.8б точечной кривой показана оценка для ИПФ, построенная по производным интерполяционных сплайнов (т.е. без сглаживания) при уровнях шумов $\delta_{\xi} = 0.05$, $\delta_{\eta} = 0.05$,

$N = 390$, сплошной кривой – значения точной ИПФ. Видно, что полученное решение существенно отличается от точной ИПФ, что иллюстрирует высокую неустойчивость такого решения к погрешностям регистрации входного и выходного сигналов. На рис. 1.4а точечной кривой показано решение, построенное по сглаживающим кубическим сплайнам (с параметрами сглаживания α_w) при тех же уровнях шумов. Видно, что решение достаточно хорошо совпадает с точной ИПФ системы (относительная ошибка идентификации $\delta_k = 0.077$).

В таблице 1.2 приведены средние значения $\bar{\delta}_k$ (объем выборки равен 30) относительной ошибки идентификации, определяемой выражением (1.3.9) при разных уровнях шумов измерений входного и выходного сигналов.

Таблица 1.2

Относительная ошибка выходного сигнала	Относительная ошибка входного сигнала				
	0.00	0.02	0.05	0.075	0.10
0.00	0.018	0.025	0.028	0.030	0.031
0.02	0.057	0.060	0.062	0.062	0.063
0.05	0.073	0.074	0.076	0.077	0.077
0.075	0.082	0.084	0.085	0.086	0.089
0.10	0.097	0.100	0.100	0.110	0.114

Анализ данных этой таблицы, позволяет сделать выводы о высокой точности предлагаемого алгоритма идентификации, которую можно объяснить следующими преимуществами алгоритма:

- Матрица СЛАУ (1.3.7) хорошо обусловлена и поэтому ошибки вычисления вектора правой части (ошибки дифференцирования выходного сигнала) слабо влияют на вычисленные значения ИПФ.
- Наличие в предлагаемом алгоритме интеграла от производной входного сигнала (при вычислении элементов матрицы Φ' (см. (1.3.5))) в значительной степени «сглаживает» ошибку

вычисления первой производной зашумленного входного сигнала, что обуславливает уменьшение общей ошибки идентификации.

- Построенное решение задачи идентификации зависит от уровня ошибки входного сигнала слабее, чем от уровня шума выходного сигнала идентифицируемой системы. Например, при уровне шума $\delta_\eta = 0.02$ и изменение уровня шума входного сигнала от 0.02 до 0.10 относительная ошибка идентификации увеличивается на 0.003, а при уровне шума $\delta_\xi = 0.02$ и изменение уровня шума выходного сигнала от 0.02 до 0.10 относительная ошибка идентификации увеличивается на 0.04.

В заключении этой главы, заметим, что предложенный алгоритм идентификации можно обобщить на случай не равных дисперсий шума как входного, так и выходного сигнала. Кроме этого алгоритм не требует выполнения определенных условий на число отсчетов входного и выходного сигналов, которые существуют при использовании алгоритма быстрого преобразования Фурье при построении регуляризирующих алгоритмов, изложенных в главе 2, 3, а также допускает не одинаковый шаг точек измерений t_i , $i = 1, \dots, N$.

ГЛАВА 2. ЛИНЕЙНЫЕ РЕГУЛЯРИЗИРУЮЩИЕ АЛГОРИТМЫ НЕПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ

В этой главе подробно рассматривается дискретное преобразование Фурье, его свойства и использование его для построения регуляризирующих алгоритмов непараметрической идентификации стационарных динамических систем, описываемых интегральным уравнением Вольтера I рода с разностным ядром. Особое внимание уделяется алгоритму выбора параметра регуляризации из условия минимума среднеквадратической ошибки решения.

§ 2.1. Дискретные последовательности и дискретное преобразование Фурье

В этом параграфе будет определено одномерное дискретное преобразование Фурье (ДПФ) и рассмотрены свойства этого дискретного преобразования [45] применимо к решению задачи непараметрической идентификации.

2.1.1. Дискретное преобразование Фурье

Обозначим через $f_p(j)$, $F_p(l)$ дискретные периодические (с периодом N) последовательности, связанные дискретным преобразованием Фурье.

Прямое ДПФ

$$F_p(l) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f_p(j) \exp\left(-\frac{2\pi i}{N} l j\right). \quad (2.1.1)$$

Обратное ДПФ

$$f_p(j) = \sum_{l=0}^{N-1} F_p(l) \exp\left(\frac{2\pi i}{N} l j\right). \quad (2.1.2)$$

Очевидно, что периодические последовательности удовлетворяют условиям:

$$f_p(j + kN) = f_p(j), \quad F_p(l + kN) = F_p(l), \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Приведем без доказательства некоторые свойства ДПФ.

$$1. \operatorname{Re}[F_p(l + N/2)] = \operatorname{Re}[F_p(N/2 - l)], l = 1, \dots, N/2 - 1.$$

$$\operatorname{Im}[F_p(N/2 + l)] = -\operatorname{Im}[F_p(N/2 - l)], \quad (2.1.3)$$

т.е. относительно $N/2$ функция $\operatorname{Re}[F_p(l)]$ симметрична, а $\operatorname{Im}[F_p(l)]$ антисимметрична.

$$\operatorname{Im}[F_p(0)] = -\operatorname{Im}[F_p(N/2)] = 0. \quad (2.1.4)$$

2. Равенство Парсеваля для ДПФ

$$\sum_{j=0}^{N-1} f_p^2(j) = N \sum_{l=0}^{N-1} |F_p(l)|^2 \quad (2.1.5)$$

Замечание 2.1.1. Свойства (2.1.3), (2.1.4) позволяют существенно «экономить» оперативную память компьютера при хранении коэффициентов ДПФ (вместо двух массивов длиной N достаточно одного массива длиной N). ♦

Замечание 2.1.1. Непосредственное вычисление ДПФ по формулам (2.1.1), (2.1.2) требует порядка N^2 операций, что при N порядка несколько сотен и больше обуславливает существенные вычислительные затраты. В 60–70 годы прошлого столетия были разработаны так называемые алгоритмы быстрого преобразования Фурье (БПФ), требующие порядка $N \log_2 N$ операций [45], что значительно уменьшает объем вычислений при взятии прямого и обратного ДПФ. ♦

2.1.2. Функции Mathcad для вычисления дискретного преобразования Фурье

Пакет Mathcad включает набор функций, позволяющих вычислять прямое и обратное ДПФ с использованием алгоритма БПФ. В таблице 2.1. приведены некоторые из этих функций, которые будут использованы в дальнейшем. В левом столбце при-

водится обращение к функции, а в правом – описание формальных параметров, и при необходимости поясняющие формулы.

Таблица 2.1

Функция	Описание функции
FFT(f)	Вычисляет прямое ДПФ (2.1.1) от вещественной последовательности f длиной 2^m . Результатом является комплексная последовательность коэффициентов ДПФ длиной $2^{m-1} + 1$.
IFFT(F)	Вычисляет обратное ДПФ (2.1.2) от комплексной последовательности F длиной $2^{m-1} + 1$. Результатом является вещественная последовательность длиной 2^m .
CFFT(f)	Вычисляет прямое ДПФ (2.1.1) от вещественной или комплексной последовательности длиной N . Результатом является комплексная последовательность коэффициентов ДПФ длиной N .
ICFFT(F)	Вычисляет обратное ДПФ (2.1.2) от комплексной последовательности коэффициентов ДПФ длиной N . Результатом является комплексная последовательность длиной N .

Пример 2.1.1. На рис. 2.1 показан фрагмент документа Mathcad в котором:

- вычисляется вещественная последовательность f_p длиной $N = 2^4 = 16$;
- вычисляются с использованием функций FFT, CFFT коэффициенты ДПФ (прямое ДПФ) этой последовательности;

- вычисляется с использованием функций IFFT, ICFFT обратное ДПФ.
- определена точность выполнения ДПФ (относительная погрешность выполнения цепочки преобразований $FFT(f) \rightarrow IFFT(F)$ составляет порядка 10^{-12} , относительная погрешность выполнения цепочки преобразований $CFFT(f) \rightarrow ICFFT(F)$ составляет $< 10^{-15}$). ☺

$$\begin{array}{l}
 j := 0..15 \quad f_{p_j} := j \quad F_{p1} := FFT(f_p) \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad F_{p2} := CFFT(f_p)
 \end{array}$$

$$F_{p1} = \begin{pmatrix} 7.5 \\ -0.5 + 2.514i \\ -0.5 + 1.207i \\ -0.5 + 0.748i \\ -0.5 + 0.5i \\ -0.5 + 0.334i \\ -0.5 + 0.207i \\ -0.5 + 0.099i \\ -0.5 \end{pmatrix}$$

$$F_{p2} = \begin{pmatrix} 7.5 \\ -0.5 + 2.514 \\ -0.5 + 1.207 \\ -0.5 + 0.748 \\ -0.5 + 0.5 \\ -0.5 + 0.334 \\ -0.5 + 0.207 \\ -0.5 + 0.099 \\ -0.5 \\ -0.5 - 0.099 \\ -0.5 - 0.207 \\ -0.5 - 0.334 \\ -0.5 - 0.5 \\ -0.5 - 0.748 \\ -0.5 - 1.207 \\ -0.5 - 2.514 \end{pmatrix}$$

$$\frac{|f_p - IFFT(FFT(f_p))|}{|f_p|} = 1.434 \times 10^{-12}$$

$$\frac{|f_p - ICFFT(CFFT(f_p))|}{|f_p|} = 0$$

Рис. 2.1. Примеры использования функций БПФ

Замечание 2.1.3. Функции CFFT, ICFFT не требуют, чтобы период $N = 2^m$. Формирование периодических последовательностей с периодом, позволяющим использовать алгоритм БПФ, осуществляется внутри этих функций. ♦

2.1.3. Формирование периодических дискретных последовательностей

Напомним, что дискретное преобразование Фурье определено над периодическими (с периодом N) дискретными последовательностями, а применение алгоритма БПФ обуславливает требование на величину N . Например, $N = 2^m$. Поэтому, если дана некоторая аperiodическая последовательность $f(j)$ $0 \leq j \leq N_f - 1$, то для применения к ней ДПФ необходимо сформировать из нее периодическую последовательность $f_p(j)$ добавлением к исходной $f(j)$ нулевых отсчетов.

Такой алгоритм формирования можно записать в виде

$$f_p(j) = \begin{cases} f(j), & 0 \leq j \leq N_f - 1; \\ 0, & N_f \leq j \leq N - 1. \end{cases} \quad (2.1.6)$$

Выбор периода N можно осуществить по правилу:

$$N = \min_m \{2^m \geq N_f\}. \quad (2.1.7)$$

2.1.4. Свойства случайной периодической последовательности

Пусть дана случайная аperiodическая последовательность с N_f случайными элементами η_j , $i = 0, \dots, N_f - 1$ и следующими числовыми характеристиками:

$$M[\eta_i] = 0; \quad M[\eta_i \eta_j] = \begin{cases} \sigma_\eta^2, & \text{если } i = j; \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases} \quad (2.1.8)$$

В соответствии с правилом (2.1.6), сформируем периодическую последовательность $\eta_p(j)$:

$$\eta_p(j) = \begin{cases} \eta_j, & 0 \leq j \leq N_f - 1; \\ 0, & N_f \leq j \leq N - 1. \end{cases} \quad (2.1.9)$$

С учетом (2.1.8), (2.1.9) можно доказать следующие соотношения:

$$M[\eta_p(i)\eta_p(j)] = \begin{cases} \sigma_\eta^2, & \text{если } i = j, 0 \leq j \leq N_f - 1; \\ 0, & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases} \quad (2.1.10)$$

$$M\left[\sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \eta_p(i)\eta_p(j)\right] = N_f \cdot \sigma_\eta^2. \quad (2.1.11)$$

Вычислим коэффициент ДПФ $H_p(l)$ периодической последовательности $\{\eta_p(j)\}$:

$$H_p(l) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \eta_p(j) e^{-\frac{2\pi i}{N} l j}, \quad 0 \leq l \leq N-1. \quad (2.1.12)$$

Коэффициенты $H_p(l)$ являются случайными величинами с нулевым математическим ожиданием:

$$M[H_p(l)] = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} M[\eta_p(j)] e^{-\frac{2\pi i}{N} l j} = 0. \quad (2.1.13)$$

Утверждение 2.1.1. Случайные величины $H_p(l)$ имеют одинаковую дисперсию $\sigma_{H_p}^2$, равную:

$$\sigma_{H_p}^2 = M\left[|H_p(l)|^2\right] = \frac{N_f}{N^2} \sigma_\eta^2 \quad (2.1.14)$$

Доказательство приведено в работе [16].

§ 2.2. Дискретные свертки последовательностей

В этом параграфе будут определены аperiodические и периодические дискретные свертки и их вычисление с использованием дискретного преобразования Фурье.

2.2.1. Аперiodические и периодические свертки

Рассмотрим две конечные дискретные последовательности $\varphi(j)$ и $k(j)$ длиной N_φ и N_k отсчетов, т.е. $\varphi(j)$ отлична от нуля при $0 \leq j \leq N_\varphi - 1$, и $k(j)$ отлична от нуля для $0 \leq j \leq N_k - 1$. Аперiodической сверткой этих последовательностей называют последовательность $f(n)$, определяемую соотношением

$$f(n) = \sum_{j=0}^{N_k-1} \varphi(n-j)k(j). \quad (2.2.1)$$

В дальнейшем в этой главе будем считать, что $k(j) \equiv 0$ для $j < 0$. Можно показать, что последовательность $f(n)$ также является конечной с числом отсчетов

$$N_f = N_\varphi + N_k - 1 \quad (2.2.2)$$

и значения этой последовательности отличны от нуля для

$$0 \leq n \leq N_f - 1. \quad (2.2.3)$$

Произведя в выражении (2.2.1) замену переменных $n-j=m$; $j=n-m$, получим

$$f(n) = \sum_{m=1}^{N_k-1} \varphi(n-m)k(m) = \sum_{j=0}^{N_\varphi-1} k(n-j)\varphi(j). \quad (2.2.4)$$

Таким образом, установлено, что рассматриваемая дискретная свертка обладает свойством коммутативности для двух последовательностей φ, k , определенных выше, что символически можно выразить равенством:

$$\varphi \otimes k = k \otimes \varphi. \quad (2.2.5)$$

Теперь рассмотрим две периодические последовательности $\varphi_p(j)$, $k_p(j)$ с периодом N . Имеют место следующие тождества:

$$\varphi_p(j \pm mN) = \varphi_p(j); k_p(j \pm mN) = k_p(j), m = 1, 2, \dots$$

Определим периодическую (круговую) свертку этих двух последовательностей, используемую в дальнейшем для задачи идентификации:

$$f_p(n) = \sum_{j=0}^{N-1} \varphi_p(n-j) k_p(j). \quad (2.2.6)$$

Результат $f_p(n)$ также является периодической последовательностью с периодом N .

Можно показать, что периодическая свертка также обладает свойством коммутативности:

$$\varphi_p \otimes k_p = k_p \otimes \varphi_p. \quad (2.2.7)$$

2.2.2. Вычисление дискретных сверток

Вновь обратимся к периодической свертке (2.2.6) периодических (с периодом N) последовательностей $\varphi_p(j)$, $k_p(j)$. Определим коэффициенты ДПФ $F_p(l)$ периодической последовательности $f_p(n)$.

Утверждение 2.2.1. Коэффициенты ДПФ $F_p(l)$ последовательности $f_p(n)$ определяются выражением

$$F_p(l) = N \Phi_p(l) K_p(l), l = 0, \dots, N-1, \quad (2.2.8)$$

где $\Phi_p(l)$, $K_p(l)$ – коэффициенты ДПФ последовательностей $\varphi_p(j)$, $k_p(j)$ соответственно.

Выражение (2.2.8) следует из цепочки формул:

$$\begin{aligned}
F_p(l) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left[\sum_{j=0}^{N-1} \varphi_p(j) k_p(n-j) \right] e^{-\frac{2\pi i}{N} nl} = \\
&= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \varphi_p(j) \cdot N \left[\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} k_p(n-j) e^{-\frac{2\pi i}{N} (n-j)l} \right] \cdot e^{-\frac{2\pi i}{N} lj} = \\
&= N \cdot \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \varphi_p(j) \cdot e^{-\frac{2\pi i}{N} lj} \cdot \frac{1}{N} \sum_{n'=0}^{N-1} k_p(n') \cdot e^{-\frac{2\pi i}{N} n'l},
\end{aligned}$$

где $n' = n - j$, $i = \sqrt{-1}$. ▼

Таким образом, алгоритм вычисления дискретной периодической свертки (2.2.6) можно представить следующими шагами:

Шаг 1. Вычисление коэффициентов ДПФ $\Phi_p(l)$, $K_p(l)$ – прямое ДПФ (2.1.1) с использование алгоритмов БПФ (требуется порядка $N \log_2 N$ вычислительных операций)

Шаг 2. Вычисление коэффициентов ДПФ $F_p(l)$ в соответствии с (2.2.8) (требуется порядка N вычислительных операций).

Шаг 3. Вычисление периодической последовательности $f_p(n)$ по коэффициентам $F_p(l)$ – обратное ДПФ (2.1.2) (требуется порядка $N \log_2 N$ вычислительных операций).

Возникает вопрос: можно ли использовать ДПФ для вычисления аperiodической свертки (2.2.1)?

Это возможно, если по аperiodическим (конечным) последовательностям сформировать периодические последовательности, а затем по вычисленной периодической свертке однозначно определить значения аperiodической свертки.

Формирование периодических последовательностей основывается на следующем рассуждении. Поскольку свертка $f(n)$ имеет $N_f = N_\varphi + N_k - 1$ ненулевых значений, то величину периода N следует выбрать из неравенства

$$N \geq N_\varphi + N_k - 1. \quad (2.2.9)$$

Так как периодические последовательности $\varphi_p(j)$, $k_p(j)$, входящие в периодическую свертку также должны иметь период N , то последовательности $\varphi(j)$, $k(j)$ дополняются нулями, т.е. последовательности $\varphi_p(j)$, $k_p(j)$ формируются следующим образом:

$$\varphi_p(j) = \begin{cases} \varphi(j), & 0 \leq j \leq N_\varphi - 1; \\ 0, & N_\varphi \leq j \leq N - 1, \end{cases} \quad (2.2.10)$$

$$k_p(j) = \begin{cases} k(j), & 0 \leq j \leq N_k - 1; \\ 0, & N_k \leq j \leq N - 1. \end{cases} \quad (2.2.11)$$

После вычисления периодической свертки $f_p(n)$ описанным выше алгоритмом определяются искомые значения аperiodической свертки:

$$f(n) = f_p(n), \quad 0 \leq n \leq N_f - 1. \quad (2.2.12)$$

Отметим, что дополнение конечных последовательностей $\varphi(j)$, $k(j)$ нулевыми отсчетами позволяет задать такой период N (см. (2.2.9)), который устраняет «круговые наложения», характерные для периодической свертки и позволяет однозначно определить (см. (2.2.12)) значения аperiodической свертки.

Замечание 2.2.1. Выбор величины периода N осуществляется на основе двух условий:

а) условие (2.2.9);

б) условие применение алгоритма БПФ для вычисления коэффициентов ДПФ последовательностей $\varphi_p(j)$, $k_p(j)$. Большинство используемых алгоритмов БПФ требуют, чтобы период N был степенью двойки, т.е.

$$N_{\text{БПФ}} = 2^m, \quad m = 1, 2, \dots \quad (2.2.13)$$

Таким образом, определить приемлемую величину периода N можно как

$$N = \min_m \{2^m \geq N_\varphi + N_k - 1\}. \quad \blacklozenge \quad (2.2.14)$$

2.2.3. Деконволюция дискретных сверток

Рассмотрим аperiodическую дискретную свертку

$$f(n) = \sum_{j=0}^{N_k-1} \varphi(n-j)k(j), \quad 0 \leq n \leq N_f - 1, \quad (2.2.15)$$

где $\varphi(j) \equiv 0$, при $j < 0$. Под задачей деконволюции этой свертки будем понимать (в рамках рассматриваемой задачи идентификации) вычисление последовательности $k(j)$ по заданным значениям последовательностей $\varphi(j)$ и $f(j)$

Свертку (2.2.15) можно представить в матричном виде

$$\Phi k = f, \quad (2.2.16)$$

где f , k – векторы размерности N_f , N_k , составленные из значений элементов соответствующих последовательностей, Φ – матрица размера $N_f \times N_k$ с элементами

$$\{\Phi\}_{i,j} = \begin{cases} \varphi(i-j), & \text{если } i-j \geq 0; \\ 0, & \text{если } i-j < 0, \end{cases} \quad (2.2.17)$$

$$i = 1, \dots, N_f, j = 1, \dots, N_k.$$

Тогда задача деконволюции аperiodической свертки сводится к задаче решения СЛАУ (2.2.16). Если бы свертка (2.2.15) являлась периодической, то, используя (2.2.8), можно вычислить коэффициенты ДПФ $K_p(l)$ искомой последовательности

$$K_p(l) = \frac{F_p(l)}{N \Phi_p(l)}, \quad (2.2.18)$$

а затем обратным ДПФ вычислить $k_p(j)$. Поэтому алгоритм деконволюции аperiodической свертки (2.2.15) можно представить следующими шагами:

Шаг 1. Формирование периодических последовательностей

$$\varphi_p(j) = \begin{cases} \varphi(j), & 0 \leq j \leq N_\varphi - 1; \\ 0, & N_\varphi \leq j \leq N - 1, \end{cases} \quad (2.2.19)$$

$$f_p(j) = \begin{cases} f(j), & 0 \leq j \leq N_f - 1; \\ 0, & N_f \leq j \leq N - 1. \end{cases} \quad (2.2.20)$$

Шаг 2. Вычисление коэффициентов ДПФ $\Phi_p(l)$, $F_p(l)$ взятием прямого ДПФ (1.3.1).

Шаг 3. Вычисление коэффициентов ДПФ $K_p(l)$ по формуле (2.2.18).

Шаг 4. Вычисление периодической последовательности $\{k_p(j)\}$ взятием обратного ДПФ (2.1.2).

Шаг 5. Если выполняется условие

$$N \geq N_f, \quad (2.2.21)$$

то искомая последовательность $k(j)$ формируется по правилу:

$$k(j) = k_p(j), \quad 0 \leq j \leq N_k - 1, \quad (2.2.22)$$

где

$$N_k = N_f - N_\varphi + 1 \quad (2.2.23)$$

Замечание 2.2.2. Если элементы последовательности $f(n)$ заданы с погрешностями (чаще всего случайными), то эти погрешности трансформируются в коэффициенты ДПФ $F_p(l)$ и при делении на малые значения $\Phi_p(l)$ могут вызвать существенную ошибку в вычислении $K_p(l)$, а, следовательно, последовательность $k(j)$ также будет вычислена с ошибкой, имеющей осциллирующий характер. ♦

Замечание 2.2.3. Для однозначной правильной деконволюции аperiodической свертки с использованием ДПФ сформируем некоторые необходимые условия, которые назовем *правилами «полной длины»*, которое определяет, что число ненулевых значений $f(n)$ равно $N_f = N_k + N_\varphi - 1$, которые участвуют в

формировании периодической последовательности $f_p(n)$ (см. (2.2.20)). В работе [16] подробно исследован эффект «укороченной» длины и была показана необходимость использовать все $N_f = N_k + N_\varphi - 1$ ненулевых элементов $f(n)$ при формировании $f_p(n)$ и это требование было названо *правилом полной длины* последовательности $f(n)$. ♦

§ 2.3. Регуляризирующий алгоритм идентификации импульсной функции динамической системы

В данном параграфе строится регуляризирующий алгоритм решения задачи идентификации импульсной функции динамической системы, описываемой интегральными уравнениями Вольтерра I рода с разностным ядром. При этом предполагается, что входной сигнал идентифицируемой системы известен (измерен) точно, а выходной задан со случайной ошибкой. Приводится алгоритм оценивания оптимального параметра регуляризации на основе критерия оптимальности. Такой регуляризирующий алгоритм будет использован для исследований свойств регуляризированных решений задачи идентификации при зашумленном входном сигнале идентифицируемой системы.

2.3.1. Построение регуляризирующего алгоритма идентификации

Рассмотрим динамическую систему, связь между входным и выходным сигналами которой описывается уравнением Вольтерра I рода с разностным ядром вида:

$$\int_0^t \varphi(t-\tau)k(\tau) d\tau = f(t), \quad 0 \leq t \leq b_f, \quad (2.3.1)$$

где $k(\tau)$ – импульсная переходная функция (ИПФ) динамической системы; $\varphi(\tau)$, $f(t)$ – входной и выходной сигналы идентифицируемой системы. Задача идентификации заключается в

построении оценки для $k(\tau)$ по зарегистрированным на соответствующих интервалах $[0, b_\varphi]$, $[0, b_f]$ значениям функций $\varphi(\tau)$, $f(t)$.

Задачу идентификации импульсной функции будем решать при следующих допущениях:

1. Функция $\varphi(\tau)$ (входной сигнал идентифицируемой системы) непрерывна, ограничена и задана своими значениями $\varphi(\tau_j)$, $\tau_j = j \cdot \Delta_t$ на интервале $[0, b_\varphi]$. Предполагается, что $\varphi(\tau) \equiv 0$, если $\tau < 0$ и $\varphi(\tau) \equiv 0$, если $\tau > b_\varphi$. Число отсчетов этой функции $N_\varphi = \text{ent}[b_\varphi / \Delta_t] + 1$, где $\text{ent}[z]$ – целая часть числа z .

2. Идентифицируемая импульсная функция $k(\tau)$ непрерывна, ограничена и определена на интервале $[0, b_k]$. Предполагается, что $k(\tau) \equiv 0$, если $\tau < 0$ и $\varphi(\tau) \equiv 0$, если $\tau > b_k$. Тогда число отсчетов $N_k = \text{ent}[b_k / \Delta_t] + 1$.

Заметим, что при таких предположениях выходной сигнал системы $f(t)$ является непрерывной ограниченной функцией, определенной на интервале $[0, b_f]$, где $b_f = b_\varphi + b_k$, вне этого интервала равна нулю, а число ненулевых отсчетов $N_f = \text{ent}[b_f / \Delta_t] + 1 = N_\varphi + N_k - 1$.

3. Вместо точных значений $f(t_j)$ регистрируются значения $\tilde{f}(t_i) = f(t_i) + \eta(t_i)$, $i = 0, \dots, N_f - 1$, где $\eta(t)$ – стационарный случайный процесс с нулевым средним и дисперсией σ_η^2 , интервал корреляции которого меньше Δ_t . Это позволяет считать значения $\eta(t_i)$ и $\eta(t_{i+1})$ не коррелированными случайными величинами.

Допущения 1 ÷ 2 позволяют аппроксимировать интегральное уравнение (2.3.1) конечномерным аналогом (формулой прямоугольников)

$$\sum_{j=0}^{N_k-1} \varphi(t_i - \tau_j) k(\tau_j) \Delta_t = f(t_i), \quad i = 0, \dots, N_f - 1, \quad (2.3.2)$$

где интервал дискретизации Δ_t выбирается (или задается) из условия малости ошибки аппроксимации интервала (2.3.1) квадратной формулой по сравнению с погрешностями $\eta(t_i)$.

Систему уравнений (2.3.2) можно записать в матричном виде

$$\Phi k = f, \quad (2.3.3)$$

где Φ – матрица размера $N_f \times N_k$, k , f – векторы соответствующей размерности. Матрица Φ , как правило, плохо обусловлена и «классические» решения этой системы не устойчивы к погрешностям задания вектора f . Поэтому в качестве устойчивой оценки для нормального псевдорешения системы (2.3.3) (вектор $\bar{k}^+$) – принимают регуляризованное решение k_α , определяемое как решение системы уравнений

$$(\Phi^T \Phi + \alpha W_k) k_\alpha = \Phi^T \tilde{f}. \quad (2.3.4)$$

Заметим, что матрица W_k – невырожденная симметричная матрица размера $N_k \times N_k$ задает стабилизирующий функционал

$$\Omega(k) = \langle W_k k, k \rangle = k^T W_k k = \|k\|_{W_k}^2.$$

Величину $\Omega(k)$ можно интерпретировать как квадрат «взвешенной» нормы вектора k .

В регуляризирующем алгоритме, построенном на основе ДПФ задается частотная характеристика стабилизирующего функционала (см. пример 1.1.2).

Регуляризирующий алгоритм идентификации ИПФ включает следующие шаги:

Шаг 1. Формирование периодических последовательностей с периодом N :

$$\varphi_p(j) = \begin{cases} \varphi(j \cdot \Delta_t) \cdot \Delta_t, & j = 0, \dots, N_\varphi - 1; \\ 0, & j = N_\varphi, N_\varphi + 1, \dots, N - 1. \end{cases} \quad (2.3.5)$$

$$\tilde{f}_p(j) = \begin{cases} \tilde{f}(j \cdot \Delta_t), & j = 0, \dots, N_f - 1; \\ 0, & j = N_f, N_f + 1, \dots, N - 1. \end{cases} \quad (2.3.6)$$

Шаг 2. Вычисление последовательности

$$\Phi_p(l) = \sum_{j=0}^{N-1} \varphi_p(j) \exp\left(-2\pi i \frac{j l}{N}\right), \quad l = 0, \dots, N - 1, \quad (2.3.7)$$

где $i = \sqrt{-1}$.

Шаг 3. Вычисление коэффициентов ДПФ последовательности $\{\tilde{f}_p(j)\}$ (прямое ДПФ):

$$\tilde{F}_p(l) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \tilde{f}_p(j) \exp\left(-\frac{2\pi i}{N} l j\right), \quad l = 0, \dots, N - 1. \quad (2.3.8)$$

Шаг 4. Вычисление коэффициентов ДПФ периодического регуляризованного решения:

$$K_{p\alpha}(l) = \frac{\Phi_p^c(l)}{|\Phi_p(l)|^2 + \alpha Q_p(l)} \cdot \tilde{F}_p(l), \quad 0 \leq l \leq N - 1, \quad (2.3.9)$$

где α – параметр регуляризации, $\Phi_p^c(l)$ – величина, комплексно-сопряженная с $\Phi_p(l)$. Элементы последовательности $\{Q_p(l)\}$ формируются по правилу:

$$Q_p(l) = \begin{cases} Q(l \cdot \Delta_\omega), & l = 0, \dots, N/2; \\ Q((N-l) \cdot \Delta_\omega), & l = N/2 + 1, \dots, N - 1, \end{cases} \quad (2.3.10)$$

где $\Delta_\omega = 2\pi/(N\Delta_t)$ – шаг дискретизации в частотной области. Функцию $Q(\omega)$ можно трактовать как частотную характеристику стабилизирующей функционала: она должна быть неубывающей функцией частоты ω и чаще всего $Q(\omega) \rightarrow \infty$ при $\omega \rightarrow \infty$. Если задан порядок регуляризации r , то при достаточно

больших значениях ω справедлива асимптотика $Q(\omega) \approx \omega^{2r}$ (см. пример 1.1.2).

Шаг 5. Вычисление периодического регуляризованного решения (обратное ДПФ):

$$k_{p\alpha}(j) = \sum_{l=0}^{N-1} K_{p\alpha}(l) \exp\left(\frac{2\pi i}{N} lj\right), \quad j = 0, \dots, N-1. \quad (2.3.11)$$

Шаг 6. Формирование N_k -мерного вектора k_α по правилу:

$$k_{\alpha j} = k_{p\alpha}(j), \quad j = 0, \dots, N_k - 1, \quad (2.4.12)$$

где $N_k = N_f - N_\varphi + 1$. Если выполнено условие (см. (2.1.13))

$$N \geq N_f + N_\varphi - 1, \quad (2.3.13)$$

то проекции вектора k_α принимаются в качестве значений регуляризованного решения $k_\alpha(\tau)$ в узлах $\tau_j = j \cdot \Delta_t$, $j = 0, \dots, N_k - 1$.

Замечание 2.3.1. В силу известных свойств ДПФ (2.1.3), (2.1.4) для вещественной последовательности все вычисления в программной реализации алгоритма выполняются для $l = 0, \dots, N/2$ (что уменьшает затраты машинного времени и оперативной памяти). ♦

Замечание 2.3.2. При выполнении вычислений (2.3.7), (2.3.8), (2.3.11) используется алгоритм быстрого преобразования Фурье (БПФ), что на 2–3 порядка уменьшает число операций по сравнению с «прямым» вычислением соответствующих сумм, а вся вычислительная процедура построения регуляризованного решения требует порядка $N \cdot \log_2 N$ вычислительных операций. ♦

Изложенный регуляризирующий алгоритм идентификации включает две неизвестных величины: функцию $Q(\omega)$ – частотную характеристику стабилизирующего функционала, входящую в соотношение (2.3.10) и параметр регуляризации α в соотношении (2.3.9).

Можно предложить два варианта задания функции $Q(\omega)$:

1) функция $Q(\omega)$ может быть задана, исходя из требуемого порядка регуляризации r , т.е. для достаточно больших частот ω имеет место

$$Q(\omega) \sim \omega^{2r}; \quad (2.3.14)$$

2) при наличии информации об асимптотическом поведении Фурье-образа искомой ИПФ $|K(\omega)|^2 \sim \omega^{-2a}$ функцию $Q(\omega)$ можно определить соотношением

$$Q(\omega) \sim \omega^{2a}.$$

В дальнейшем будем считать, что функция $Q(\omega)$ определена (задана) и будет рассматриваться только *проблема выбора α* .

Эта проблема является основной при использовании регуляризирующих алгоритмов на практике. Дело в том, при заниженных значениях α в решении $k_\alpha(\tau)$ будут присутствовать шумовые составляющие, обусловленные шумом правой части $\eta(t)$. При завышенных значениях α из решения $k_\alpha(\tau)$ будут «удалены» информативные компоненты функции $k(\tau)$. Поэтому в качестве оптимального значения α_{opt} примем значение, доставляющее минимум функционалу (см. рис. 1.1):

$$\Delta(\alpha) = M_\eta \left[\|k_\alpha - \bar{k}^+\|^2 \right], \quad (2.3.15)$$

где $\bar{k}^+$ – псевдорешение, коэффициенты ДПФ которого определяются выражением:

$$\bar{K}_p^+(l) = \frac{\bar{F}_p(l)}{\bar{\Phi}_p(l)}, \quad l = 0, \dots, N-1. \quad (2.3.16)$$

Коэффициенты $\bar{F}_p(l), \bar{\Phi}_p(l)$ вычисляются по «точным» последовательностям $f_p(j), \varphi_p(j)$, формируемых из «точных» значений выходного и входного сигналов. На практике вычисление точного значения α_{opt} невозможно из-за незнания идентифицируемой функции $k(\tau)$. Предложены разные методы и алгоритмы выбора параметра регуляризации [7,11,16,74,88,89,94,105]).

Все они имеют свои преимущества и недостатки. Наиболее подходящим для решаемой задачи идентификации является излагаемый ниже алгоритм, позволяющий оценить α_{opt} с приемлемой точностью. При этом делается предположение, что шум измерения выходного сигнала (случайный процесс $\eta(t)$) является стационарным с нулевым средним и дисперсией σ_η^2 . Тогда проекции случайного вектора шума $\eta = \left[\eta(t_1), \dots, \eta(t_{N_f}) \right]^T$ также имеют нулевое среднее и дисперсию σ_η^2 .

2.3.2. Критерий оптимальности регуляризирующего алгоритма

Вновь рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений

$$\Phi k = f \quad (2.3.17)$$

с неточно заданной правой частью $\tilde{f} = f + \eta$ и матрицей Φ размером $N_f \times N_k$. Введем решение $k_T = T \tilde{f}$, где T – матричный оператор размера $N_k \times N_f$. Точность этого решения определим функционалом (в дальнейшем называемый среднеквадратической ошибкой (СКО)):

$$\Delta(T) = M_\eta \left[\left\| k_T - \bar{k}^+ \right\|^2 \right], \quad (2.3.18)$$

где $\bar{k}^+$ – нормальное псевдорешение, соответствующее точной правой части, а математическое ожидание $M_\eta [\]$ берется по всему ансамблю случайных векторов η . Требуется определить *оптимальный оператор* T_{opt} , доставляющий минимум (2.3.18) среди всех других матричных операторов. В работах [7,15,16] было доказано

Утверждение 2.3.1. Необходимым и достаточным условием оптимальности оператора T , строящего решение $k_T = T\tilde{f}$, где $\tilde{f} = \Phi k + \eta$, является матричное тождество:

$$V_e(T) = V_\eta E^T(T), \quad (2.3.19)$$

где V_η – ковариационная матрица вектора η , $V_e(T) = M[e_T e_T^T]$ – ковариационная матрица вектора невязки $e_T = f - \Phi k_T$. ▼

Соотношение (2.3.19) трудно использовать для априорного построения оптимального оператора T_{opt} , так как оно включает вектор невязки, определяемый по построенному оператору T . Однако его можно использовать для ответа на вопрос: оптимален или нет построенный оператор T ? Поэтому соотношение (2.3.19) можно рассматривать как *критерий оптимальности решающего оператора T* .

Применение изложенного выше критерия оптимальности для вычисления значения α_{opt} , минимизирующего среднеквадратическую ошибку (2.3.18) связано с двумя трудностями. Во-первых, оценка матрицы вторых моментов $V_e(\alpha)$, вычисленная по одной реализации вектора невязки $e_\alpha = \tilde{f} - \Phi k_\alpha$, непригодна для проверки тождества (2.3.19) из-за малой точности оценивания. Во-вторых, в силу параметризации оператора T (например, $T(\alpha) = (\Phi^T \Phi + \alpha W_k)^{-1} \Phi^T$) условие (2.3.19) становится только достаточным. Действительно, найдется величина α , доставляющее минимум СКО, но при этом α не будет точно выполняться (2.3.19). Следовательно, целесообразно в качестве α_{opt} взять такое значение α_w , при котором принимается основная статистическая гипотеза:

$$H_0 : V_e(\alpha) = V_\eta E^T(\alpha). \quad (2.3.20)$$

В качестве альтернативной гипотезы примем

$$H_1: V_e(\alpha) \neq V_\eta E^T(\alpha). \quad (2.3.21)$$

Эта гипотеза принимается, если невыполнение тождества (2.3.20) обусловлено не случайными ошибками, возникающими из-за оценивания $V_e(\alpha)$ по одной реализации, а систематическими, обусловленными не оптимальностью параметра регуляризации. Таким образом, значение α_w можно рассматривать как оценку оптимального параметра регуляризации α_{opt} .

Для проверки гипотезы (2.3.20) введем статистику [7,9,91]

$$\rho_w(\alpha) = e_\alpha^T [V_\eta E^T(\alpha)]^{-1} e_\alpha. \quad (2.3.22)$$

Существование матрицы $[E^T(\alpha)]^{-1}$ позволяет переписать $\rho_w(\alpha)$ в виде

$$\rho_w(\alpha) = \tilde{f} V_\eta^{-1} e_\alpha. \quad (2.3.23)$$

В работе [9,91] доказано

Утверждение 2.3.2. Если матрица V_η не вырождена, то:

- а) для любого $\alpha > 0$ статистика $\rho_w(\alpha)$ есть положительно определенная квадратичная форма N_f случайных величин;
- б) для значений α_w , при которых принимается гипотеза (2.3.24), математическое ожидание $M[\rho_w(\alpha)] = N_f$. ▼

Приведенные свойства статистики $\rho_w(\alpha)$ позволяют аппроксимировать распределение $\rho_w(\alpha)$ при $\alpha = \alpha_w$ χ^2 -распределением с N_f степенями свободы, где N_f размерность вектора правой части СЛАУ. Тогда проверка гипотезы (2.3.20) сводится к проверке предположения: *подчиняется ли величина $\rho_w(\alpha)$ χ^2 -распределению с $t = N_f$ степенями свободы.*

Для этого построим интервал

$$\Theta_m(\beta) = [\mathcal{G}_{m,\beta/2}, \mathcal{G}_{m,1-\beta/2}], \quad (2.3.24)$$

где $\mathcal{G}_{m,\beta/2}$ – квантиль χ^2 -распределения уровня $\beta/2$. Если $\rho_w(\alpha)$ попадает в интервал (2.3.24), т.е. выполняется неравенство

$$\mathcal{G}_{m,\beta/2} \leq \rho_w(\alpha) \leq \mathcal{G}_{m,1-\beta/2}, \quad (2.3.25)$$

то гипотеза (2.3.20) может быть принята с вероятностью ошибки первого рода, равной β (обычно $\beta = 0.05$), и значение α_w , при котором выполняется (2.3.25), является оценкой для α_{opt} .

Возникает вопрос: как вычислить значение α_w в описанном выше регуляризующем алгоритме решения задачи непараметрической идентификации? Ниже приводится эффективный алгоритм вычисления α_w , использующий дискретное преобразование Фурье [7, 16].

2.3.3. Выбор параметра регуляризации на основе критерия оптимальности

Предполагая некоррелированность значений $\eta(t_j)$, т.е.

$V_\eta = \sigma_\eta^2 \cdot I$ статистику (2.3.23) можно записать в виде

$$\rho_w(\alpha) = \sum_{i=1}^{N_f} \frac{e_{\alpha_i} \cdot \tilde{f}_i}{\sigma_\eta^2}, \quad (2.3.26)$$

e_{α_i} – проекции вектора невязки $e_\alpha = \tilde{f} - \Phi k_\alpha$. Для вычисления значения α_w , удовлетворяющего неравенству (2.3.25) используется итерационная процедура относительно величины $\gamma = 1/\alpha$ вида

$$\gamma^{(n)} = \gamma^{(n-1)} - \frac{R_w(\gamma^{(n-1)}) - m}{R'_w(\gamma^{(n-1)})}, \quad n = 1, 2, \dots; \gamma^{(0)} \ll 1, \quad (2.3.27)$$

где $m = N_f$, $R_W(\gamma) = \rho_W(1/\gamma)$, $R'_W(\gamma) = \frac{d}{d\gamma} R_W(\gamma)$. В качестве значения α_W принимается $\alpha_W = 1/\gamma_W$, $\gamma_W = \gamma^{(n)}$, где $\gamma^{(n)}$ удовлетворяет условию

$$\mathcal{G}_{m,\beta/2} \leq R_W(\gamma^{(n)}) \leq \mathcal{G}_{m,1-\beta/2}. \quad (2.3.28)$$

Это означает, что итерационная процедура (2.3.27) прекращается, как только выполнится условие (2.3.28). Заметим, что (2.3.27) является итерационной процедурой нахождения приближенного решения нелинейного уравнения $R_W(\gamma) = \rho_W(1/\gamma) = m$, окончание которой определяется не «традиционным» условием (2.3.28). Заметим, что подобная итерационная схема использовалась в работах [48,56,58,59] для функций $R_W(\gamma)$, $R'_W(\gamma)$, определяемых на основе принципа невязки.

В работе [16] предложен эффективный алгоритм вычисления $R_W(\gamma)$, $R'_W(\gamma)$, использующий коэффициенты ДПФ и описываемый следующими выражениями:

$$R_W(\gamma) = \frac{N}{\sigma_\eta^2} \cdot \sum_{l=0}^{N-1} \frac{Q_p(l)}{\gamma \cdot |\Phi_p(l)|^2 + Q_p(l)} \cdot |\tilde{F}_p(l)|^2, \quad (2.3.29)$$

$$R'_W(\gamma) = - \frac{N}{\sigma_\eta^2} \cdot \sum_{l=0}^{N-1} \frac{Q_p(l) \cdot |\Phi_p(l)|^2}{\left[\gamma \cdot |\Phi_p(l)|^2 + Q_p(l) \right]^2} \cdot |\tilde{F}_p(l)|^2. \quad (2.3.30)$$

Видно, что эти соотношения требуют только порядка N вычислительных операций.

Утверждение 2.3.3. Если начальное значение $\gamma^{(0)} \ll 1$ удовлетворяет условию

$$R_W(\gamma^{(0)}) > \mathcal{G}_{m,1-\beta/2}, \quad (2.3.31)$$

то существует конечное значение α_W , вычисляемое процедурой (2.3.27) и удовлетворяющее (2.3.28).

Доказательство основано на следующих свойствах функции $R_W(\gamma)$:

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} R_W(\gamma) = 0 \text{ и } R_W(\gamma) > 0, R'_W(\gamma) < 0 \text{ для любых } \gamma > 0,$$

которые следуют из (2.3.29), (2.3.30). Поэтому итерационная процедура (2.3.27) нахождения корня нелинейного уравнения $R_W(\gamma) = m = N_f$ обязательно (при выполнении условия (2.3.31)) вычислит значение $\gamma_W = \gamma^{(n)}$, удовлетворяющее условию (2.3.28), а, следовательно, и значение $\alpha_W = 1/\gamma_W$, удовлетворяющее неравенству

$$\mathcal{G}_{m,\beta/2} \leq \rho_W(\alpha_W) \leq \mathcal{G}_{m,1-\beta/2}. \quad \blacktriangledown \quad (2.3.32)$$

Обычно $\gamma^{(0)} \approx 10^{-15}$ и для вычисления α_W требуется не более 4–5 итераций. Если условие (2.3.31) не выполняется даже при значениях $\gamma^{(0)}$ близких к нулю $\sim 10^{-20}$, то это означает, что правая часть интегрального уравнения содержит только погрешности $\eta(t)$ и в этом случае $\alpha_W = \infty$, а регуляризованное решение $k_\alpha(\tau) \equiv 0$. Заметим, что условие (2.3.31) для $\gamma^{(0)} \approx 0$ эквивалентно условию

$$\sum_{i=1}^{N_f} \frac{\tilde{f}_i^2}{\sigma_\eta^2} > \mathcal{G}_{m,1-\beta/2}, \quad (2.3.32)$$

проверка которого не требует вычисления коэффициентов ДПФ.

Замечание 2.3.1. Если $m = N_f > 30$, то для вычисления квантилей $\mathcal{G}_{m,\beta/2}$, $\mathcal{G}_{m,1-\beta/2}$ рекомендуется использовать формулы

$$\mathcal{G}_{m,\beta/2} = m - 1.96\sqrt{2m}; \quad \mathcal{G}_{m,1-\beta/2} = m + 1.96\sqrt{2m}, \quad (2.3.33)$$

которые аппроксимирует квантили χ^2 -распределения при $\beta = 0.05$ ♦

Пример 2.3.1. На рис. 2.2 показан график функции $R_w(\gamma)$ (кривая 1), относительной ошибки $\|k_{1/\gamma} - \bar{k}^+\| / \|\bar{k}^+\| \cdot 100$ (кривая 2), а также границы $\mathcal{Q}_{410,0.975}$, $\mathcal{Q}_{410,0.025}$, вычисленные по формулам (2.3.33) (кривые 3, 4 соответственно). В этом вычислительном эксперименте размер матрицы Φ аппроксимирующей системы (2.1.1) равен 410×100 , $N_k = 100$, $N_\varphi = 311$, $N_f = 410$. Число обусловленности $3 \cdot 10^{10}$, относительный уровень погрешности правой части $\delta_\eta = \|\eta\| / \|f\| = 0.05$. Видим, что все значения γ_w (для которых значения $R_w(\gamma)$ попадают в интервал (2.3.32)) находятся в области минимума относительной ошибки регуляризованного решения. ☺

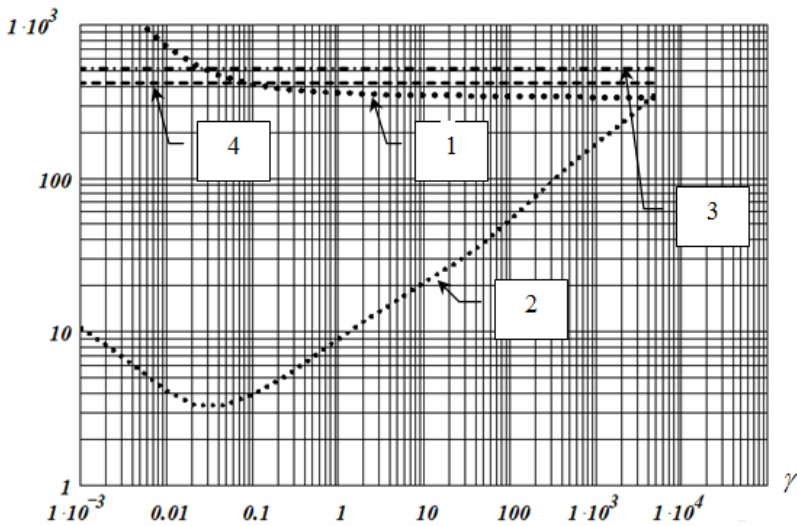


Рис. 2.2. Графики $R_w(\gamma)$ и относительной ошибки регуляризованного решения

Рассмотрим сходимость решения k_{α_w} , построенного при $\alpha = \alpha_w$. Для этого перепишем функцию $\rho_w(\alpha)$ в виде:

$$\rho_w(\alpha) = R_w(1/\alpha) = \frac{\alpha}{\sigma_\eta^2} \cdot N \cdot \sum_{l=0}^{N-1} \frac{Q_p(l) \cdot |\tilde{F}_p(l)|^2}{|\Phi_p(l)|^2 + \alpha \cdot Q_p(l)}. \quad (2.3.34)$$

Заметим, что граничные точки $\mathcal{G}_{m,\beta/2}$, $\mathcal{G}_{m,1-\beta/2}$ не зависят от дисперсии σ_η^2 , а зависят от вероятности β ошибки первого рода и m . Поэтому для попадания величины $\rho_w(\alpha)$ в интервал $[\mathcal{G}_{m,\beta/2}, \mathcal{G}_{m,1-\beta/2}]$ необходимо, чтобы α изменялось с такой же скоростью, как уменьшается дисперсия σ_η^2 , т.е. $\alpha_w \sim \sigma_\eta^2$ (см. 2.3.34).

Утверждение 2.3.4. При достаточно малых значениях σ_η^2 среднеквадратическая ошибка решения k_{α_w} имеет порядок σ_η^2 , т.е.

$$\Delta(\alpha_w) = M_\eta \left[\|k_{\alpha_w} - \bar{k}^+\|^2 \right] \sim \sigma_\eta^2. \quad (2.3.35)$$

Для доказательства представим СКО идентификации в виде:

$$\Delta(\alpha_w) = N \sum_{l=0}^{N-1} \left[\frac{\frac{\alpha_w^2 Q_p^2(l) \cdot |\bar{K}_p^+(l)|^2}{\left(|\Phi_p(l)|^2 + \alpha_w Q_p(l)\right)^2} + \frac{+\sigma_\eta^2 \cdot |\Phi_p(l)|^2}{\left(|\Phi_p(l)|^2 + \alpha_w Q_p(l)\right)^2}}{\left(|\Phi_p(l)|^2 + \alpha_w Q_p(l)\right)^2} \right]. \quad (2.3.36)$$

Подставляя в это выражение $\alpha_w \sim \sigma_\eta^2$, приходим к соотношению:

$$\Delta(\alpha_w) \sim \sigma_\eta^2 \cdot \sum_{l=0}^{N-1} \left[\frac{\sigma_\eta^2 \cdot Q_p^2(l) \cdot |\bar{K}_p^+(l)|^2}{\left(|\Phi_p(l)|^2 + \sigma_\eta^2 Q_p(l) \right)^2} + \frac{|\Phi_p(l)|^2}{\left(|\Phi_p(l)|^2 + \sigma_\eta^2 Q_p(l) \right)^2} \right],$$

из которого непосредственно следует (2.3.35). ▼

Можно показать [16], что оптимальный параметр регуляризации имеет порядок $\alpha_{opt} \sim \sigma_\eta^2$, т.е. такой же как и параметр α_w .

Исследование точности регуляризованных решений, построенных при $\alpha = \alpha_w$, приводится ниже.

2.3.4. Исследование эффективности параметра α_w

Основным вопросом, возникающим при применении какого-либо алгоритма выбора параметра регуляризации, является вопрос: насколько ухудшается точность регуляризованного решения, построенного при значении параметра регуляризации выбранного некоторым алгоритмом (в нашем случае на основе критерия оптимальности) по сравнению с оптимальным регуляризованным решением (параметр α_{opt})? Для ответа на этот вопрос обратимся к коэффициенту эффективности параметра регуляризации, введенного в работах [15, 16] и определяемый (для параметра регуляризации α_w) выражением

$$E_w = \frac{\left\| k_{\alpha_{opt}} - \bar{k}^+ \right\|}{\left\| k_{\alpha_w} - \bar{k}^+ \right\|}. \quad (2.3.37)$$

Этот коэффициент является случайной величиной, принимающей значения из интервала $(0,1]$. Значения близкие к единице (например, $0.9 \div 0.95$) говорят о небольшом проигрыше по точности, значения меньше 0.5 указывают на значительное (по сравнению с оптимальным решением) увеличение ошибки регуляризованного решения. Зная числовые характеристики (среднее значение, минимальное и максимальное значения и

т.д.) этой случайной величины, можно говорить о применимости соответствующего алгоритма выбора параметра регуляризации.

В работах [11,16] было выполнено сравнение различных алгоритмов выбора с использованием коэффициента эффективности (2.3.37) для регуляризирующего алгоритма решения обратных измерительных задач (т.е. для решения уравнения Вольтера I рода вида (1.1.1)). В силу симметричности уравнений (1.1.1), (1.1.3) результаты этих исследований можно распространить и на выбор параметра регуляризации при решении задачи идентификации.

Было показано:

1. Значение коэффициента эффективности оценки α_W для разных решений находятся в интервале $[0.80, 1.00]$, а среднее значения коэффициента эффективности находится в интервале $[0.88, 0.97]$ и мало зависит от коррелированности значений шума регистрации правой части. Это хорошо иллюстрирует рис. 2.3 на котором приведена гистограмма частот коэффициента эффективности E_W , из которой видно, что все значения E_W находятся в интервале $[0.80, 1.00]$ (объем выборки был равен 50).

2. Значения коэффициента эффективности оценки α_V (статистический вариант принципа невязки [16]) имеет худшие значения коэффициента эффективности, Так средние значения находятся в интервале $[0.73, 0.85]$, что существенно хуже средних значений оценки α_W .

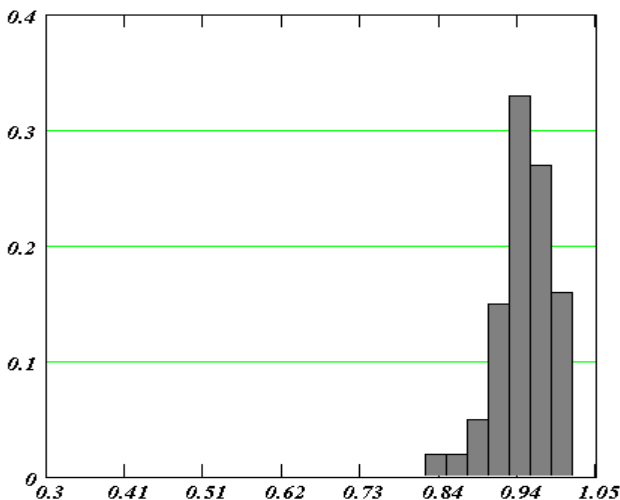


Рис. 2.3. Гистограмма частот коэффициента эффективности E_w

3. Оценка α_U (метод перекрестной значимости [6,16,65,85]) может иметь небольшие значения параметра эффективности (в 10 % объема выборки), которые обусловлены тем, что функционал $U(\alpha)$ имеет не явно выраженный минимум, точка которого может смещаться влево в область заниженных (по сравнению с α_{opt}) значений параметра регуляризации, что приводит к увеличению ошибки регуляризованного решения k_{α_U} и уменьшению значения коэффициента эффективности. Существенным недостатком этого способа выбора параметра регуляризации является *сильное влияние коррелированности шума на коэффициент эффективности E_U (следовательно, и на точность регуляризованного решения)*. Даже небольшая коррелированность проекций шума (коэффициент корреляции 0.2) вызывает существенное уменьшение средних значений коэффициента эффективности и появление значений $\sim 10^{-4}$, что

соответствует увеличению ошибки регуляризованного решения в тысячи раз.

4. Коэффициент эффективности алгоритма выбора параметра регуляризации на основе метода L -кривой [16,53,54,55, 75,82,83,100] не уменьшается в случае коррелированного шума. Однако его средние значения на 10-15 % меньше по сравнению с оценкой α_w . Кроме этого алгоритм выбора на основе метода L -кривой имеет значительные вычислительные затраты.

Обобщая приведенные результаты этих исследований, можно сделать вывод о *целесообразности использования алгоритма выбора параметра регуляризации, построенного на критерии оптимальности и позволяющего достаточно точно оценивать α_{opt}* .

2.4. Свойства регуляризованных решений задачи идентификации в случае зашумленного входного сигнала

В этом параграфе будет исследовано влияние шума измерения входного сигнала идентифицируемой системы на свойства регуляризованных решений задачи непараметрической идентификации (см. также [41,39,41]).

2.4.1. Регуляризирующий алгоритм при зашумленных сигналах идентифицируемой системы

Напомним, что ранее как при построении РА идентификации, так и при выборе параметра регуляризации предполагалось, что, что входной сигнал идентифицируемой системы задан точно. Однако такое требование редко выполняется на практике так, как и входной и выходной сигналы системы измеряются и регистрируются приборами примерно одинакового класса точности и, следовательно, и входной и выходной сигналы задаются с случайными погрешностями – шумами измерений.

При использовании в этом случае РА, изложенного выше («традиционный» РА - см. параграф 2.2) возникают следующие вопросы:

Во-первых, всегда ли при построении регуляризованного решения рассматриваемой задачи идентификации следует учитывать погрешности задания входного сигнала идентифицируемой системы или можно ограничиться «традиционными» более простыми РА, но при этом возможный проигрыш по точности решения будет приемлемым.

Во-вторых, в какой степени ошибки регуляризованного решения зависят от относительных уровней шума измерений входного и выходного сигналов системы.

В-третьих, насколько меняется оптимальный параметр регуляризации при вариации относительных уровней шумов измерений и можно ли использовать некоторые алгоритмы выбора параметра регуляризации (разработанные для точно заданного входного сигнала) для оценивания оптимального параметра регуляризации в условиях неточно заданного входного сигнала.

Попытаемся дать ответы на эти вопросы, важные при решении большого числа практических задач.

Будем предполагать, что измеренные значения $\tilde{f}(t_i)$, $\tilde{\varphi}(\tau_j)$ допускают представления

$$\tilde{f}_i = \tilde{f}(t_i) = f(t_i) + \eta(t_i), \quad \tilde{\varphi}_j = \varphi(\tau_j) + \xi(\tau_j), \quad (2.4.1)$$

где $\eta(t_i)$, $\xi(\tau_j)$ - случайные величины (шумы измерений) с нулевыми средними и дисперсиями σ_η^2 , σ_ξ^2 и величины $\eta(t_i)$, $\xi(\tau_j)$ не коррелированы друг с другом.

Построение регуляризованного решения на основе «традиционного» РА, но с использованием зашумленного входного сигнала можно представить следующими «укрупненными» шагами (подробнее см. параграф 2.2):

Шаг 1. Формирование по дискретным значениям $\tilde{f}_i$, $\tilde{\varphi}_j$ периодических последовательностей $\tilde{f}_p(i)$, $\tilde{\varphi}_p(i)$, $i = 0, \dots, N-1$, где N - величина периода и взятия от этих последовательностей

ДПФ, т.е. вычисление коэффициентов ДПФ $\tilde{F}_p(l), \tilde{\Phi}_p(l), l = 0, \dots, N-1$.

Шаг 2. Вычисление коэффициентов ДПФ $K_{p\alpha}(l), l = 0, \dots, N-1$, регуляризованного решения.

Шаг 3. Вычисление периодического регуляризованного решения $k_{p\alpha}(i), i = 0, \dots, N-1$ (взятием обратного ДПФ от последовательности $\{K_{p\alpha}(l)\}$ и формирование вектора непериодического регуляризованного решения $k_{\alpha_j}, j = 0, \dots, N_k-1$, как оценку для значений решения интегрального уравнения в дискретные моменты времени: $k(\tau_j), j = 0, \dots, N_k-1$.

Очевидно, что точность регуляризованного решения определяется способом вычисления $K_{p\alpha}(l)$ на втором шаге, а именно:

$$K_{p\alpha}(l) = \frac{\tilde{\Phi}_p^c(l)}{|\tilde{\Phi}_p(l)|^2 + \alpha Q_p(l)} \cdot \tilde{F}_p(l), l = 0, \dots, N-1,$$

где α – параметр регуляризации, $\tilde{\Phi}_p^c(l)$ – величина, комплексно-сопряженная с $\tilde{\Phi}_p(l)$. Элементы последовательности $\{Q_p(l)\}$ задаются точно также, как и в «традиционном» РА (см. (2.3.10)).

Для выбора параметра регуляризации вновь обратимся к критерию оптимальности РА (см. параграф 2.3). Введем статистику

$$\tilde{\rho}_w(\alpha) = \frac{1}{\sigma_\eta^2} \langle \tilde{f}, \tilde{e}_\alpha \rangle, \quad (2.4.2)$$

где $\tilde{e}_\alpha = \tilde{f} - \tilde{\Phi}k_\alpha$ – вектор невязки при зашумленном входном сигнале, $\tilde{\Phi}$ – матрица системы уравнений (2.3.3), элементы которой определяются значениями зашумленного входного сигнала, k_α – вектор, составленный из значений регуляризованного решения $k_\alpha(\tau_j), j = 0, \dots, N_k-1$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – скалярное произведение векторов. Тогда в качестве оценки для α_{opt} можно принять величину $\tilde{\alpha}_w$, для которой выполняется неравенство

$$\mathcal{G}_{m,\beta/2} \leq \tilde{\rho}_W(\tilde{\alpha}_W) \leq \mathcal{G}_{m,1-\beta/2} \quad (2.4.3)$$

где $\mathcal{G}_{m,\beta/2}$ $\mathcal{G}_{m,1-\beta/2}$ – квантили χ^2 -распределения с $m = N_f$ степенями свободы уровней $\beta/2$ и $1-\beta/2$, β – вероятность ошибки первого рода (обычно 0.05) при проверке статистической гипотезы об оптимальности значения $\tilde{\alpha}_W$. Заметим, что знак $\sim$ означает, что при вычислении величины (отмеченной этим символом) использовался зашумленный входной сигнал идентифицируемой системы.

Для эффективного вычисления значения $\tilde{\alpha}_W$, удовлетворяющего неравенству (2.4.3) вновь используется итерационная процедура (2.3.27), в которой

$$\tilde{R}_W(\gamma) = \frac{N}{\sigma_\eta^2} \cdot \sum_{l=0}^{N-1} \frac{Q_p(l)}{\gamma |\tilde{\Phi}_p(l)|^2 + Q_p(l)} \cdot |\tilde{F}_p(l)|^2,$$

$$\tilde{R}'_W(\gamma) = -\frac{N}{\sigma_\eta^2} \cdot \sum_{l=0}^{N-1} \frac{Q_p(l) |\tilde{\Phi}_p(l)|^2}{\left[\gamma |\tilde{\Phi}_p(l)|^2 + Q_p(l) \right]^2} \cdot |\tilde{F}_p(l)|^2.$$

Видно, что эти соотношения требуют только порядка N вычислительных операций, что обеспечивает высокую вычислительную эффективность вычисления значения $\tilde{\alpha}_W$.

2.4.2. Исследования свойств регуляризованных решений при зашумленном входном сигнале

Для ответа на вопросы, приведённые в начале параграфа 2.4.1 выполнен многочисленный вычислительный эксперимент. Рассмотрим наиболее интересные результаты этих экспериментов.

В качестве импульсной переходной функции использовались два вида функций, графики которых приведены на рис. 2.4: «гладкая» ИПФ – кривая 1 (будем обозначать ИПФ1); «колебательная» ИПФ – кривая 2 (ИПФ2). Входной сигнал задавался

двумя функциями: «узкополосным» - кривая 1 на рис. 2.5 (обозначим ВХОД1) и «широкополосным» - кривая 2 на рис. 2.7 (обозначим ВХОД2). Такой выбор входных сигналов был обусловлен тем, что для широкополосного сигнала при прочих равных условиях точность оценивания ИПФ возрастает. Количество отсчетов $k(\tau_j)=100$, количество отсчетов входного сигнала $\varphi(\tau_j)$ $N_k=60$ и $N_f = N_\varphi + N_k - 1 = 159$, $N = 256$. Шаг дискретизации $\Delta_t = 0.022$.

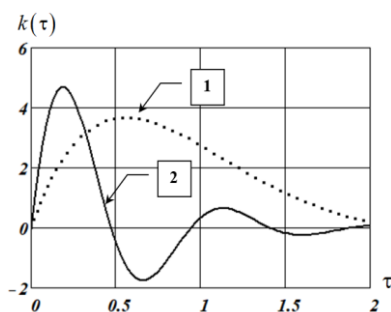


Рис. 2.4. Импульсные переходные функции $k(\tau)$

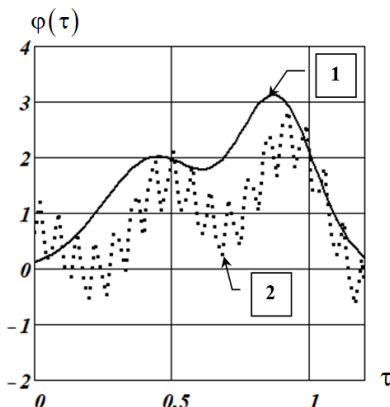


Рис. 2.5. Входные сигналы системы

Относительные уровни шума правой части δ_η и шума измерения входного сигнала δ_ξ , определялись соотношениями:

$\delta_\eta = \frac{\|\eta\|}{\|f\|}$, $\delta_\xi = \frac{\|\xi\|}{\|\varphi\|}$, где f, φ - векторы размерности N_f, N_k , составленные из значений $f(t_i), \varphi(\tau_j)$ соответственно, $\|\cdot\|$ - евклидова норма вектора. Точность построенного регуляризованного решения определялась относительной ошибкой

$\delta_k(\alpha) = \frac{\|k_\alpha - k\|}{\|k\|}$, где k - вектор, составленный из значений иско-
мой ИПФ.

Первая серия экспериментов была посвящена исследова-
нию влияния неточности задания входного сигнала на ошибку
регуляризованного решения. На рис. 2.6 представлены следу-
ющие зависимости $\delta_k(\alpha)$ для ИПФ2 и ВХОД2: кривая 1 -
 $\delta_\eta = 0.10, \delta_\xi = 0.0$ (т.е. входной сигнал задан точно); кривая 2 -
 $\delta_\eta = 0.10, \delta_\xi = 0.02$; кривая 3 - $\delta_\eta = 0.10, \delta_\xi = 0.10$; кривая 4 -
 $\delta_\eta = 0.02, \delta_\xi = 0.0$; кривая 5 - $\delta_\eta = 0.02, \delta_\xi = 0.10$. На рис. 2.7 по-
казаны те же зависимости для сигнала ВХОД1.

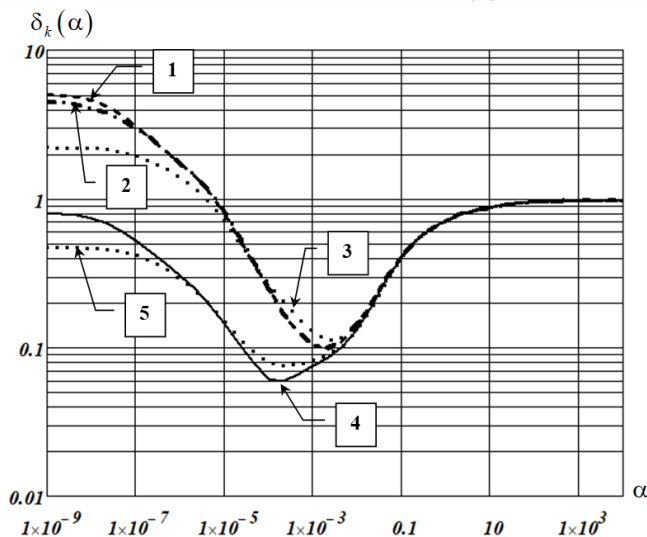


Рис. 2.6. Зависимости $\delta_k(\alpha)$ для ИПФ2 и ВХОД2

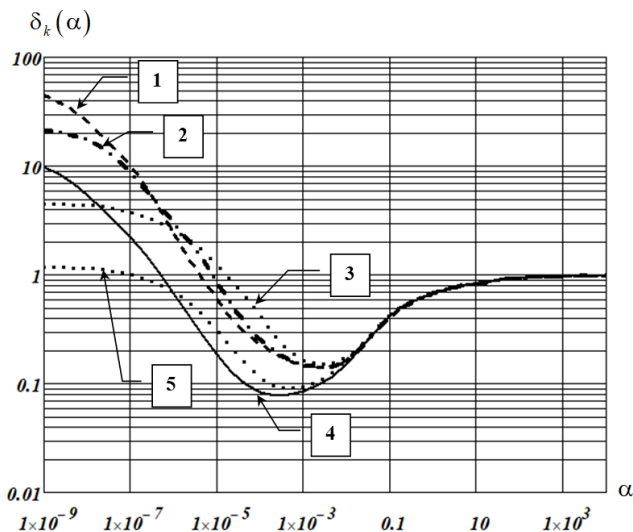


Рис. 2.7. Зависимости $\delta_k(\alpha)$ для ИПФ2 и ВХОД1

Анализ приведенных зависимостей показывает:

- Если уровень шума правой части намного (в 2-3 раза) больше уровня шума входного сигнала, то относительная ошибка регуляризованного решения с зашумленным входным сигналом практически совпадает с относительной ошибкой решения при точно заданном входном сигнале, особенно в области минимальных значений $\delta_k(\alpha)$ и в области больших α , за исключением малых значений параметра регуляризации $\alpha \leq 10^{-5}$ (см. кривые 1,2).
- Если уровни шумов правой части и входного сигнала примерно одинаковы, то в области минимальных значений $\delta_k(\alpha)$ и больших α ошибки идентификации при точном входном сигнале и неточно заданном входе практически сопоставимы (см. кривые 1,3).
- Если уровень шума входного сигнала в несколько раз выше уровня шума правой части, то решение при точном вход-

ном сигнале меньше по сравнению с неточно заданном входе (см. кривые 4,5).

- В области малых значений параметра регуляризации ошибки решений при неточно заданном входе меньше ошибок решений при точном входном сигнале (см. кривые 4,5). Величина такого уменьшения пропорциональна уровню шума ядра (сравните кривые 2 и 5). Этот эффект можно объяснить тем, что при малых α случайный шум входного сигнала выполняет своеобразную регуляризацию – квадраты $|\tilde{\Phi}_p(l)|^2$ коэффициентов ДПФ зашумленного ядра при больших значениях l преобладают в знаменателе выражения (3) над значениями стабилизатора $\alpha Q_p(l)$ и это уменьшает ошибку вычисления $K_{p\alpha}(l)$ для этих значений l и, соответственно, вызывает уменьшение общей ошибки регуляризованного решения.

- Для низкочастотного сигнала ВХОД1 (см. рис. 2.9) наблюдается увеличение ошибки идентификации для всех определенных выше комбинаций δ_η, δ_ξ при сохранении отмеченных выше закономерностей в изменении $\delta_k(\alpha)$.

На рис. 2.8 представлены зависимости $\delta_k(\alpha)$ для ИПФ1 (низкочастотная ИПФ) и ВХОД2 (нумерация кривых та же, что и на рис. 2.6, 2.7; кривые 1 и 2 на рис. 2.8 совпали). Видно, что в области средних и больших значений параметра регуляризации значения $\delta_k(\alpha)$ для точно и неточно заданных входов практически совпадают.

Полученные в вычислительном эксперименте закономерности изменения $\delta_k(\alpha)$ позволяют надеяться, что для оценивания оптимального параметра регуляризации α_{opt} можно использовать (для определенных соотношений уровней шумов δ_η, δ_ξ) приведенный выше модифицированный алгоритм вычисления $\tilde{\alpha}_w$, в котором участвуют коэффициенты ДПФ зашумленного входного сигнала.

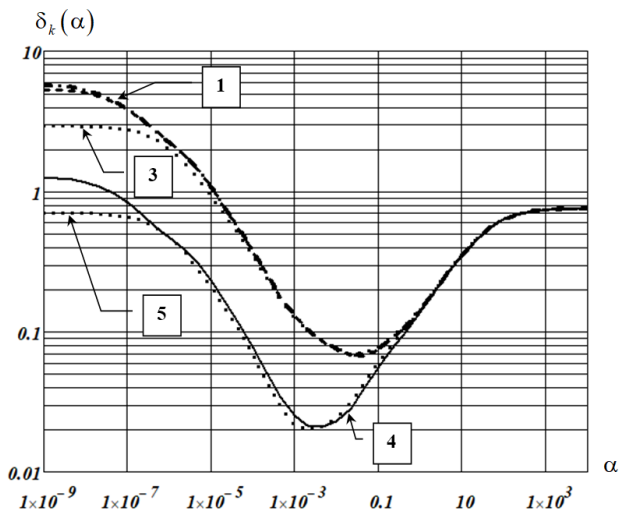


Рис. 2.8. Зависимости $\delta_k(\alpha)$ для ИПФ1 и ВХОД2

2.4.3. Выбор параметра регуляризации при неточно заданном ядре интегрального уравнения

Первоначально рассмотрим свойства параметра α_w при идентификации ИПФ2 с неточно заданным входным сигналом ВХОД2 (высокочастотный сигнал). На рис. 2.9 показаны: кривая 1 – зависимость $\delta_k(\gamma)$, вычисленное при $\delta_\eta = 0.10$, $\delta_\xi = 0.02$; кривая 2 – функция $R_w(\gamma)$ (входной сигнал задан точно); кривая 3 – функция $\tilde{R}_w(\gamma)$ (входной сигнал задан неточно); кривые 4,5 – значения $\vartheta_{m,\beta/2}$, $\vartheta_{m,1-\beta/2}$ соответственно.

Видно, что кривые 2,3 практически совпали и значения γ , для которых $R_w(\gamma)$, $\tilde{R}_w(\gamma)$ находится между прямыми 4,5 (выполняется неравенство (2.3.28)) могут быть приняты в качестве γ_w и эти значения находятся в области минимума относительной ошибки идентификации. На рис. 2.10 представлены те же зависимости (с той же нумерацией), но вычисленные при

$\delta_\eta = 0.05$, $\delta_\xi = 0.05$ (т.е. когда уровни шумов входного и выходного сигналов одинаковые). Видно, что и в этом случае можно сделать тот же вывод: значения $\tilde{\gamma}_w$ находятся в области минимума

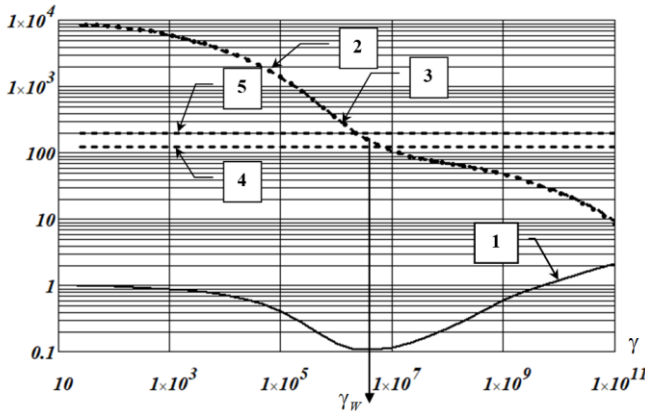


Рис. 2.9. Графики функций $\delta_k(\gamma)$, $R_w(\gamma)$ для $\delta_\eta = 0.10$, $\delta_\xi = 0.02$

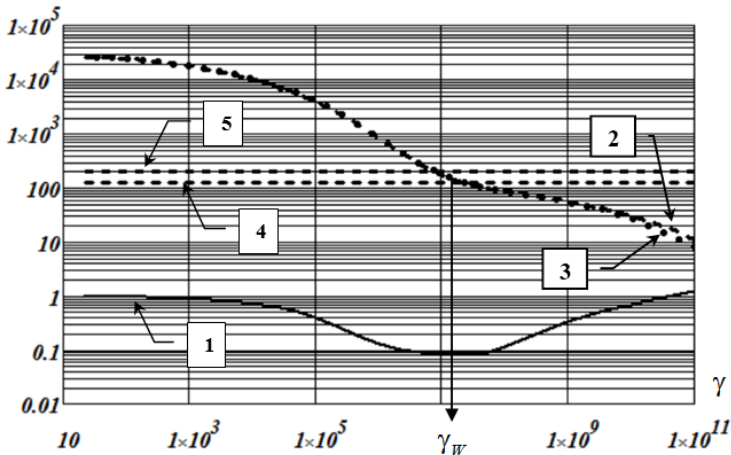


Рис. 2.10. Графики функций $\delta_k(\gamma)$, $R_w(\gamma)$ для $\delta_f = 0.05$, $\delta_\phi = 0.05$

На рис. 2.11 приведены те же зависимости, но вычисленные для $\delta_\eta = 0.02, \delta_\xi = 0.10$ где превалируют погрешности задания ядра. Но уже в этом случае значение $\tilde{\gamma}_w$ незначительно смещено от точки минимума относительной ошибки идентификации в сторону больших значений γ (или в сторону меньших значений параметра регуляризации).

Следует заметить, что аналогичное смещения значений наблюдается и для ИПФ1 и ВХОД1 (поэтому результаты этих исследований здесь не приводится).

Анализ результатов проведенных экспериментов позволяет сделать выводы:

- Относительный уровень погрешностей задания правой части в большей степени влияет на ошибку регуляризованного решения, чем погрешности входного сигнала идентифицируемой системы.

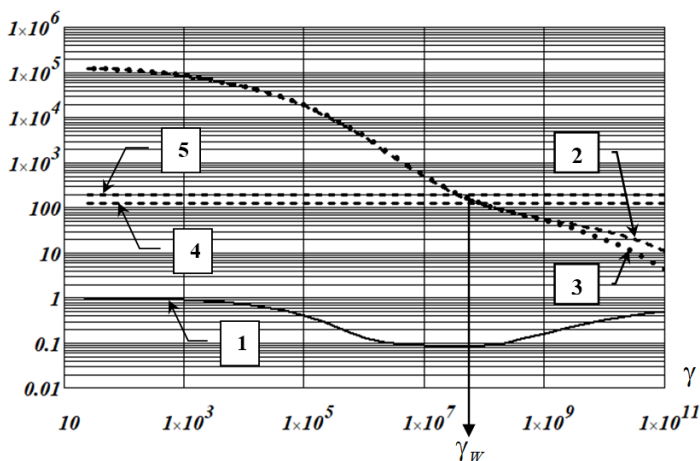


Рис. 2.11. Графики функций $\delta_k(\gamma), R_w(\gamma)$ для $\delta_f = 0.02, \delta_\phi = 0.10$

- Если погрешности правой части соизмеримы или больше погрешностей входного сигнала, то в качестве оценки опти-

мального параметра регуляризации можно принимать значение α_w , вычисленное по критерию оптимальности, но используя при этом значения зашумленного входного сигнала. Если относительный уровень шума входного сигнала значительно больше (в 5-8 раз) уровня шума выходного сигнала, то при оценивании α_{opt} следует в критерии оптимальности учесть погрешности ядра (см. параграф 3.1).

Эти выводы являются ответами на вопросы, поставленные в начале этого параграфа и позволяют обоснованно выбрать регуляризирующий алгоритм (включая выбор параметра регуляризации) для решения задачи параметрической идентификации с неточно заданным входным сигналом идентифицируемой системы.

2.5. Оценивание числовых характеристик аддитивных шумов

Как видно из результатов предыдущих параграфов для правильного оценивания оптимального параметра регуляризации требуется задание дисперсий шумов измерения входного и выходного сигналов. Для выбора регуляризирующего алгоритма непараметрической идентификации динамической системы необходимо также знать относительный уровень этих шумов измерения входного и выходного сигналов идентифицируемой системы. В литературе задаче оценивания дисперсии и относительного уровня шумов измерения не уделяется должного внимания и отсутствуют алгоритмы, позволяющие с приемлемой точностью оценить эти числовые характеристики шумов измерений. Результаты этого параграфа в определенной степени снимают эти вопросы (см. также [38]).

2.5.1. Оценивание дисперсии шума измерения

Введем в рассмотрение модель «сигнал+шум» следующего вида:

$$z_j = v_j + f_j, j = 0, \dots, N_z - 1, \quad (2.5.1)$$

где f_j - значения детерминированного сигнала, $\{v_j\}$ случайная дискретная последовательность, элементы которой имеют нулевое среднее, дисперсию σ_v^2 и значения v_j не коррелированы между собой. Из непериодической последовательности (2.5.1) сформируем периодическую (с периодом $N \geq N_z$) последовательность $\{z_p(j)\}$ из N элементов по следующему правилу:

$$z_p(j) = \begin{cases} z_j, & j = 0, \dots, N_z - 1; \\ 0, & j = N_z, \dots, N - 1. \end{cases} \quad (2.5.2)$$

Прямое дискретное преобразование Фурье этой последовательности определим выражением:

$$Z_p(l) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} z_p(j) \cdot \exp(\sqrt{-1} \cdot \frac{2\pi}{N} lj), \quad l = 0, \dots, N - 1. \quad (2.5.3)$$

Заметим, что использование алгоритма БПФ (быстрого преобразования Фурье) существенно уменьшает затраты машинного времени на выполнение ДПФ по сравнению с «прямым» вычислением суммы в (2.5.3). Напомним, что выбор периода N определяется требованием используемой функции БПФ к длине периодической последовательности (например, для многих функций БПФ период N должен быть равен степени 2, т.е. $N = 2^m, m \geq 3$).

В соответствии со свойством линейности ДПФ, коэффициенты $Z_p(l)$ также представляют собой сумму:

$$Z_p(l) = V_p(l) + F_p(l), \quad l = 0, \dots, N - 1.$$

Утверждение 2.5.1. Для принятой модели (2.5.1) коэффициенты ДПФ $V_p(l)$, являются случайными величинами с нулевым математическим ожиданием и одинаковой дисперсией $\sigma_{V_p}^2$, определяемой выражением (см. (2.1.14)):

$$\sigma_{V_p}^2 = M \left[|V_p(l)|^2 \right] = \frac{N_z}{N^2} \sigma_v^2. \quad (2.5.4)$$

Доказательство утверждения приведено в работе [16]. ▼

Для оценивания дисперсию $\sigma_{V_p}^2$ коэффициентов ДПФ $Z_p(l)$ используем тот факт, что в окрестности точки $l = N/2$ коэффициенты $Z_p(l)$ определяются (для низкочастотного сигнала f_i) только коэффициентами $V_p(l)$ и в этом случае оценку $\hat{\sigma}_{V_p}^2$ можно вычислить по формуле:

$$\hat{\sigma}_{V_p}^2 = \frac{1}{2M} \cdot \sum_{l=-M}^M |Z_p(N/2 + l)|^2, \quad (2.5.5)$$

а затем оценить дисперсию σ_v^2 непериодической последовательности $\{v_i\}$:

$$\hat{\sigma}_v^2 = \frac{N^2}{N_z} \cdot \hat{\sigma}_{V_p}^2. \quad (2.5.6)$$

Для иллюстрации эффективности такого подхода к оцениванию дисперсии шума в модели «сигнал+шум» был выполнен следующий вычислительный эксперимент. В качестве «точно-го» сигнала был принят выходной сигнал f_j , значения которого показаны на рис. 2.12 сплошной кривой. Эти значения искажались нормально распределенным шумом (результат z_j показан на рис. 2.12 точечной кривой). Такая форма сигнала является типичной для выходного сигнала при идентификации динамической системы второго порядка ($N_z = 150$, $N = 256$).

На рис. 2.13 приведены квадраты модулей $|Z_p(l)|^2$ (сплошная кривая) и $|V_p(l)|^2$ (точечная кривая). Видно, что в достаточно большой окрестности точки $l = N/2 = 128$ (например, $l = 128 \pm 90$) эти квадраты модулей совпадают и по этим коэффициентам $Z_p(l)$ можно вычислять оценку (2.5.5).

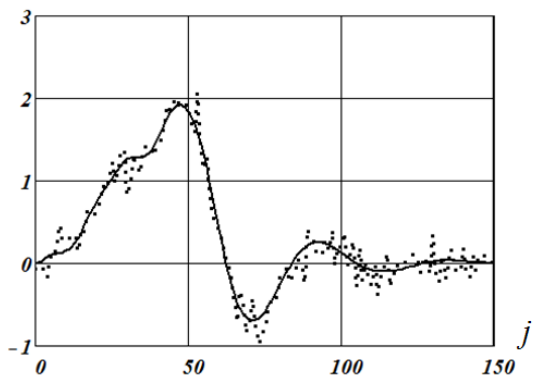


Рис. 2.12. Значения сигналов f_j, z_j

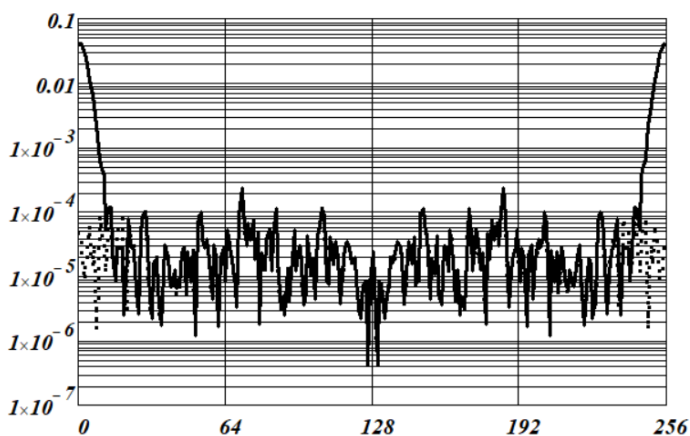


Рис. 2.13. Коэффициенты ДПФ сигналов $\{v_i\}, \{z_i\}$

Далее, на рис. 2.14 сплошной кривой показаны значения оценки $\hat{\sigma}_v^2$, вычисленной по формуле (2.5.6) при разных M , а точечной кривой – оценка дисперсии, вычисленная по известной реализации шума $\{v_i\}$. Видно, что при $M \in [60, 100]$ оценка $\hat{\sigma}_v^2$ может успешно использоваться для оценивания дисперсий шума суммы «сигнал+шум». Этот пример и другие эксперименты с

оценкой $\hat{\sigma}_{v_p}^2$ по формуле (2.5.5) позволяют рекомендовать выбор M из интервала $\left[1.1 \cdot \frac{N}{4}, 1.3 \cdot \frac{N}{4}\right]$. В данном примере эта рекомендация дает значения $M \in [70, 84]$. Увеличение ошибки оценивания при малых значениях M можно объяснить малым объемом выборки, по которой вычисляется оценка (2.5.5), увеличение ошибки при больших значениях M – в сумму (2.5.5) начинают входить коэффициенты $F_p(l)$. Заметим, что выбор M также можно осуществить из анализа графика коэффициентов $|Z_p(l)|^2$ (сплошная кривая на рис. 2.13).

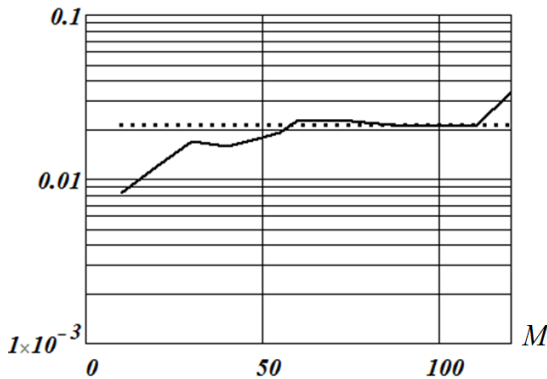


Рис. 2.14. К оцениванию дисперсии шума

2.5.2. Оценивание относительного уровня шума

В качестве величины относительного уровня шума суммы «сигнал+шум» примем отношение [38]:

$$\delta_v = \sqrt{\frac{M \left[\|v\|^2 \right]}{\|f\|^2}}, \quad (2.5.7)$$

где $\|v\|^2$ – квадрат евклидовой нормы вектора v , составленного из N_z значений дискретного шума $\{v_i\}$ модели (2.5.1).

Первоначально вычислим величину числителя при сделанных предположениях:

$$M\left[\|v\|^2\right] = M\left[\sum_{i=0}^{N_z-1} v_i^2\right] = \sigma_v^2 \cdot N_z.$$

Для вычисления знаменателя (8) обратимся к представлению :

$$M\left[\|z\|^2\right] = M\left[\|v\|^2\right] + M\left[\|f\|^2\right] = M\left[\|v\|^2\right] + \|f\|^2,$$

из которого следует выражение:

$$\|f\|^2 = M\left[\|z\|^2\right] - M\left[\|v\|^2\right].$$

По одной реализации невозможно достаточно точно вычислить выборочную оценку для $M\left[\|z\|^2\right]$ и потому ее заменим величиной $\|z\|^2$. Для вычисления $\|z\|^2$ обратимся к равенству Парсеваля, которое для ДПФ имеет вид (подробнее см. [3]):

$$\sum_{j=0}^{N-1} z_p^2(j) = N \sum_{l=0}^{N-1} |Z_p(l)|^2.$$

Тогда последнее выражение можно переписать как

$$\sum_{j=0}^{N-1} z_p^2(j) = \sum_{i=0}^{N_z-1} z_i^2 = \|z\|^2 = N \sum_{l=0}^{N-1} |Z_p(l)|^2. \quad (2.5.8)$$

Тогда, возвращаясь к (2.5.7), получаем следующую оценку для относительного уровня шума $\{v_i\}$ в модели «сигнал+шум» вида $z_i = v_i + f_i, i = 0, \dots, N_z - 1$:

$$\hat{\sigma}_v = \sqrt{\frac{\hat{\sigma}_v^2 \cdot N_z}{N \cdot \sum_{l=0}^{N-1} |Z_p(l)|^2 - \hat{\sigma}_v^2 \cdot N_z}}. \quad (2.5.9)$$

где оценка $\hat{\sigma}_v^2$ дисперсии шума σ_v^2 вычисляется по формулам (2.5.6), (2.5.5) при соответствующем выборе величины M в выражении (2.5.5).

Для исследования точности этой оценки был проведен вычислительный эксперимент с различными сигналами и уровнями шумов (подробнее см. [38]). Результаты эксперимента пока-

зали, что относительная ошибка определения уровня шума не превосходит 2-5 %, что позволяет считать оценку (2.5.9) достаточно эффективной оценкой.

Обобщая результаты этой главы, **можно дать следующие рекомендации:**

1. Если относительный уровень шума входного сигнала идентифицируемой системы меньше или равен относительному уровню выходного сигнала, то для построения регуляризованного решения задачи непараметрической идентификации можно использовать «классический» регуляризующий алгоритм с выбором параметра регуляризации на основе критерия оптимальности. При этом коэффициенты ДПФ входного сигнала вычисляются по зашумленному сигналу, но ни при построении регуляризованного решения, ни при выборе параметра регуляризации не учитываются числовые характеристики шума измерения входного сигнала.

2. Если относительный уровень шума входного сигнала существенно выше (в 2-3 раза и больше) уровня шума выходного сигнала, то для уменьшения ошибки идентификации необходимо обратиться к алгоритмам, использующим информацию о числовых характеристиках шума измерения входного сигнала. Один из таких алгоритмов построен в параграфе 3.1 следующей главы.

ГЛАВА 3. НЕЛИНЕЙНЫЕ РЕГУЛЯРИЗИРУЮЩИЕ АЛГОРИТМЫ ИДЕНТИФИКАЦИИ

В этой главе будут построены и исследованы три нелинейных регуляризирующих алгоритма идентификации, которые в той или иной степени учитывают шум измерения входного сигнала идентифицируемой системы и его числовые характеристики.

3.1. Регуляризирующий алгоритм идентификации при высоком уровне шума входного сигнала

В данном параграфе излагается регуляризирующий алгоритм идентификации импульсной переходной функции динамической системы, описываемой уравнением Вольтера I рода, когда входной и выходной сигналы идентифицируемой системы измерены с шумами (погрешностями). Этот алгоритм учитывает статистику шумов измерения входного сигнала и выходного сигналов не только при выборе параметра регуляризации (как это делается в обобщенном принципе невязки [46,47,63,71,72]), но и при построении самого регуляризованного решения.

3.1.1. Построение регуляризирующего алгоритма идентификации

Как и в параграфе 2.3 решение задачи идентификации ИПФ будем рассматривать при допущениях:

1. Функция $\varphi(\tau)$ (входной сигнал идентифицируемой системы) непрерывна, ограничена и задана своими значениями $\varphi(\tau_j), \tau_j = j \cdot \Delta_t$ на интервале $[0, b_\varphi]$ и вне этого интервала равна нулю. Число отсчетов этой функции $N_\varphi = \text{ent}[b_\varphi/\Delta_t] + 1$, где $\text{ent}[z]$ – целая часть числа z .

2. Идентифицируемая импульсная функция $k(\tau)$ непрерывна, ограничена и определена на интервале $[0, b_k]$ и вне

этого интервала равна нулю. Тогда число отсчетов $N_k = \text{ent}[b_k/\Delta_t] + 1$.

При таких предположениях выходной сигнал системы $f(t)$ тоже является непрерывной функцией, определенной на интервале $[0, b_f]$, где $b_f = b_\varphi + b_k$, вне этого интервала равно нулю, а число ненулевых отсчетов $N_f = \text{ent}[b_f/\Delta_t] + 1 = N_\varphi + N_k - 1$.

3. Измеренные (зарегистрированные) значения $\tilde{f}(t_i)$, $\tilde{\varphi}(\tau_j)$ допускают представления:

$$\tilde{f}_i = \tilde{f}(t_i) = f(t_i) + \eta(t_i), \quad \tilde{\varphi}_j = \varphi(\tau_j) + \xi(\tau_j), \quad (3.1.1)$$

где $\eta(t_i)$, $\xi(\tau_j)$ - случайные величины (шумы измерений) с нулевыми средними и дисперсиями $\sigma_\eta^2, \sigma_\xi^2$ и величины $\eta(t_i)$, $\xi(\tau_j)$ не коррелированы друг с другом.

При неточно заданной правой части $f(t_j) + \eta(t_j)$ дискретную свертку (2.3.2) определим выражением:

$$\sum_{j=0}^{N_k-1} \varphi(t_j - \tau_j) k(\tau_j) \Delta_t = f(t_i) + \eta(t_i), \quad i = 0, \dots, N_f - 1.$$

Если входной сигнал измеряется с шумом, то используя представление

$$\varphi(\tau_j) = \tilde{\varphi}(\tau_j) - \xi(\tau_j),$$

эту свертку можно записать в виде

$$\sum_{j=0}^{N_k-1} \tilde{\varphi}(t_i - \tau_j) k(\tau_j) \Delta_t = f(t_i) + \eta(t_i) + \sum_{j=0}^{N_k-1} \xi(t_i - \tau_j) k(\tau_j) \Delta_t,$$

или

$$\sum_{j=0}^{N_k-1} \tilde{\varphi}(t_i - \tau_j) k(\tau_j) \Delta_t = \sum_{j=0}^{N_\varphi-1} k(t_i - \tau_j) \xi(\tau_j) \Delta_t + f(t_i) + \eta(t_i).$$

В матричном виде последнюю свертку можно представить системой уравнений:

$$\tilde{\Phi}k = f + \eta + K\xi = f + \eta', \quad (3.1.2)$$

где K – матрица размера $N_f \times N_k$, элементы которой вычисляются через значения искомой ИПФ $k(\tau)$ по формуле:

$$K_{i,j} = \begin{cases} k(t_i - t_j)\Delta_t, & i \geq j; \\ 0, & i < j. \end{cases}$$

В этой системе уравнений матрица $\tilde{\Phi}$ вычисляется через зашумленные значения входного сигнала $\tilde{\varphi}(\tau_j)$, а правая часть искажается «эквивалентным» вектором погрешности

$$\eta' = \eta + K\xi. \quad (3.1.3)$$

Новый вектор погрешностей имеет нулевое среднее и ковариационную матрицу

$$V_{\eta'}(K) = M[\eta'\eta'^T] = V_\eta + KV_\xi K^T, \quad (3.1.4)$$

где V_ξ – ковариационная матрица вектора ξ шума измерения входного сигнала.

Напомним, что в случае точно заданного входного сигнала регуляризированное решение k_α определялось из *системы линейных уравнений* (см. (2.3.4)):

$$(\Phi^T V_\eta^{-1} \Phi + \alpha W_k)k = \Phi^T V_\eta^{-1} f.$$

В случае неточно заданного входного сигнала вектор погрешности η' правой части имеет ковариационную матрицу (3.1.4) и поэтому регуляризированное решение k_α определяется из *системы нелинейных уравнений*

$$(\tilde{\Phi}^T V_{\eta'}^{-1}(K) \tilde{\Phi} + \alpha W_k)k = \tilde{\Phi}^T V_{\eta'}^{-1}(K) f, \quad (3.1.5)$$

где запись $V_{\eta'}(K)$ указывает на явную зависимость ковариационной матрицы (3.1.4) от значений ИПФ динамической системы. Принятое допущение о некоррелированности между собой

значений $\xi(\tau_j)$, $\xi(\tau_{j+1})$ и $\eta(t_i)$, $\eta(t_{i+1})$ позволяет записать следующие выражения для ковариационных матриц $V_\eta = \sigma_\eta^2 \cdot I_{N_f}$, $V_\xi = \sigma_\xi^2 \cdot I_{N_\varphi}$. Тогда матрица $V_{\eta'}(K)$ имеет вид

$$V_{\eta'}(K) = \sigma_\eta^2 \cdot I_{N_f} + \sigma_\xi^2 \cdot K K^T. \quad (3.1.6)$$

Таким образом, необходимо построить эффективный алгоритм вычисления регуляризованного решения (т.е. решения системы (3.1.5)) для случая, когда $V_{\eta'}(K)$ определяется выражением (3.1.6).

Следую работам [41,103], приведем регуляризирующий алгоритм идентификации ИПФ, который включает следующие шаги:

Шаг 1. Формирование периодических с периодом N последовательностей:

$$\tilde{\varphi}_p(j) = \begin{cases} \tilde{\varphi}(j \cdot \Delta_t) \cdot \Delta_t, & j = 0, \dots, N_\varphi - 1; \\ 0, & j = N_\varphi, N_\varphi + 1, \dots, N - 1. \end{cases} \quad (3.1.7)$$

$$\tilde{f}_p(j) = \begin{cases} \tilde{f}(j \cdot \Delta_t), & j = 0, \dots, N_f - 1; \\ 0, & j = N_f, N_f + 1, \dots, N - 1. \end{cases} \quad (3.1.8)$$

Шаг 2. Вычисление последовательности

$$\tilde{\Phi}_p(l) = \sum_{j=0}^{N-1} \tilde{\varphi}_p(j) \exp\left(-\frac{2\pi i}{N} \cdot jl\right), \quad l = 0, \dots, N-1,$$

где $i = \sqrt{-1}$.

Шаг 3. Вычисление коэффициентов ДПФ последовательности $\{\tilde{f}_p(j)\}$ (прямое ДПФ):

$$\tilde{F}_p(l) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \tilde{f}_p(j) \exp\left(-\frac{2\pi i}{N} l j\right), \quad l = 0, \dots, N-1. \quad (3.1.9)$$

Шаг 4. Определение коэффициентов ДПФ (обозначаемые как $K_{p\alpha}(l)$) регуляризованного решения.

Шаг 5. Вычисление периодического регуляризованного решения (обратное ДПФ):

$$k_{p\alpha}(j) = \sum_{\ell=0}^{N-1} K_{p\alpha}(\ell) \exp\left(\frac{2\pi i}{N} \cdot \ell j\right), \quad j = 0, \dots, N-1. \quad (3.1.10)$$

Шаг 6. Формирование N_k -мерного вектора k_α по правилу:

$$k_{\alpha_j} = k_{p\alpha}(j), \quad j = 0, \dots, N_k - 1, \quad (3.1.11)$$

где $N_k = N_f - N_\varphi + 1$.

Если выполнено условие

$$N \geq N_f + N_\varphi - 1, \quad (3.1.12)$$

то проекции вектора k_{α_j} принимаются в качестве значений регуляризованного решения $k_\alpha(\tau)$ в узлах $\tau_j = j \cdot \Delta_t$, $j = 0, \dots, N_k - 1$.

Приведенный алгоритм построения регуляризованного решения аналогичен алгоритму § 2.2 за исключением шага 4, когда вычисляются коэффициенты $K_{p\alpha}(\ell)$. Рассмотрим вычисление этих коэффициентов при справедливости допущения 3, а именно: погрешности регистрации $\eta(\tau)$, $\xi(\tau)$ являются стационарными случайными процессами с нулевыми средними и дисперсиями σ_η^2 , σ_ξ^2 соответственно.

Тогда коэффициенты ДПФ $K_{p\alpha}(\ell)$ регуляризированной последовательности $\{k_{p\alpha}(j)\}$ определяются из нелинейного уравнения (подробнее см. [12,13,14,41]):

$$K_{p\alpha}(\ell) = \frac{\tilde{\Phi}_p^c(\ell)}{\left|\tilde{\Phi}_p(\ell)\right|^2 + \alpha(\sigma_\xi^2 \left|K_{p\alpha}(\ell)\right|^2 + \sigma_\eta^2)} \cdot \tilde{F}_p(\ell), \quad (3.1.13)$$

$$\ell = 0, 1, \dots, N-1,$$

где α – параметр регуляризации, $\tilde{\Phi}_p^c(l)$ – величина, комплексно сопряженная $\tilde{\Phi}_p(l)$; $Q_p(l)$ – элементы последовательности, формируемые по правилу (2.3.10). Введем отношение дисперсий $\theta = \sigma_\xi^2 / \sigma_\eta^2$ и перепишем уравнение (3.1.13) в виде

$$K_{p\alpha}(l) = \frac{\tilde{\Phi}_p^c(l)}{|\tilde{\Phi}_p(l)|^2 + \alpha(1 + \theta|K_{p\alpha}(l)|^2)} \cdot \tilde{F}_p(l), \quad (3.1.14)$$

Заметим, что задать отношение θ проще, чем дисперсии $\sigma_\xi^2, \sigma_\eta^2$ в отдельности. Так, если известно, что уровень шума $\eta(t)$ в два раза больше уровня $\xi(t)$, то отношение $\theta = (0.5)^2 = 0.25$.

Утверждение 3.1.1. Нелинейное уравнение (3.1.14) имеет единственное решение при значениях $\alpha \geq 0, \theta \geq 0$.

Доказательство. При $\alpha = 0$ решением является решение метода наименьших квадратов. При $\theta = 0$ решением нелинейного уравнения является регуляризированное решение, не учитывающее погрешности задания ядра. При $\alpha > 0, \theta > 0$ правая часть является монотонно убывающей к нулю функцией коэффициента $K_{p\alpha}(l)$, равной

$$\frac{\tilde{\Phi}_p^c(l)}{|\tilde{\Phi}_p(l)|^2 + \alpha \cdot Q_p(l)} \cdot \tilde{F}_p(l)$$

при $K_{p\alpha}(l) = 0$. Левая часть уравнения линейно возрастает, начиная от нулевого значения. Поэтому обязательно найдется единственная точка, в которой будет выполняться тождество (3.1.14). ▼

Для нахождения решения $K_{p\alpha}^*(l)$ нелинейного уравнения (3.1.10) при фиксированном параметре регуляризации α можно использовать любой алгоритм решения нелинейного уравнения. Здесь обратимся к схеме простой итерации:

$$K_{p\alpha}^{(n+1)}(l) = \frac{\tilde{\Phi}_p^c(l)}{|\tilde{\Phi}_p(l)|^2 + \alpha(1 + \theta |K_{p\alpha}^{(n)}(l)|^2)} \cdot \tilde{F}_p(l), \quad (3.1.15)$$

$$n = 0, 1, \dots$$

«Точка старта» $K_{p\alpha}^{(0)}(l)$ задается как

$$K_{p\alpha}^{(0)}(l) = \frac{\tilde{\Phi}_p^c(l)}{|\tilde{\Phi}_p(l)|^2 + \alpha \cdot Q_p(l)} \cdot \tilde{F}_p(l), \quad l = 0, 1, \dots, N-1.$$

Условие прекращения итераций имеет вид

$$\left[\frac{\sum_{l=0}^{N-1} |K_{p\alpha}^{(n+1)}(l) - K_{p\alpha}^{(n)}(l)|^2}{\sum_{l=0}^{N-1} |K_{p\alpha}^{(n)}(l)|^2} \right]^{\frac{1}{2}} \leq 0.01. \quad (3.1.16)$$

Вычислительный эксперимент показал, что для выполнения условия (3.1.16) требуется не более 5–8 итераций.

Заметим, что если входной сигнал системы задан точно, т.е. $\sigma_\varepsilon^2 = 0$ и $\theta = 0$, то изложенный алгоритм совпадает с алгоритмом параграфа 2.2 (что и следовало ожидать).

3.1.2. Алгоритмы выбора параметра регуляризации

Как уже отмечалось (см. § 2.3), проблема выбора параметра регуляризации, входящего в (3.1.14), (3.1.15) является основной при использовании регуляризирующих алгоритмов на практике. Как и прежде в качестве оптимального значения $\tilde{\alpha}_{opt}$ примем значение, доставляющее минимум функционалу

$$\Delta(\alpha) = M \left[\|k_\alpha - \bar{k}^+\|^2 \right], \quad (3.1.16)$$

где вектор $\bar{k}^+$ – нормальное псевдорешение, коэффициенты ДПФ которого определяются (2.3.16) по точным значениям входного и выходного сигналов. Вычисление α_{opt} требует зада-

ния определенных характеристик функции $k(\tau)$ (в частности, значений ИПФ), которые на практике не известны. Поэтому перейдем к построению алгоритма, позволяющего оценить α_{opt} при известных дисперсиях σ_ξ^2 , σ_η^2 .

Следует заметить, что изложенный в предыдущем параграфе регуляризирующий алгоритм даже при заданном параметре регуляризации является нелинейным. Несмотря на нелинейность попытаемся построить алгоритм выбора на основе критерия оптимальности (см. параграф 2.3), хотя этот критерий был получен для линейных РА.

Для использования критерия оптимальности при неточно заданной функции $\tilde{\varphi}(\tau)$ заменим в статистике (2.3.23), которая используется для проверки статистической гипотезы об оптимальности параметра регуляризации, ковариационную матрицу V_η на ковариационную матрицу $V_\eta(K)$ «эквивалентного» вектора погрешностей правой части:

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}_w(\alpha) &= \tilde{f}^T \cdot (V'_\eta(K))^{-1} \cdot e_\alpha = \\ &= \tilde{f}^T \cdot [\sigma_\eta^2 \cdot I_{N_f} + \sigma_\xi^2 \cdot KK^T]^{-1} \cdot e_\alpha\end{aligned}\quad (3.1.17)$$

Для вычисления значения $\tilde{\alpha}_w$ (символ тильда $\sim$ означает учет шума измерения входного сигнала при вычислении параметра регуляризации), удовлетворяющего неравенству):

$$\mathcal{G}_{m, \beta/2} \leq \tilde{\rho}_w(\tilde{\alpha}_w) \leq \mathcal{G}_{m, 1-\beta/2} \quad (3.1.18)$$

вновь обратимся к итерационной процедуре относительно величины $\gamma = 1/\alpha$ вида

$$\gamma^{(n)} = \gamma^{(n-1)} - \frac{\tilde{R}_w(\gamma^{(n-1)}) - m}{\tilde{R}_w(\gamma^{(n-1)})}, \quad n = 1, 2, \dots; \gamma^{(0)} \ll 1, \quad (3.1.19)$$

где $m = N_f$, $\tilde{R}_W(\gamma) = \tilde{\rho}_W(1/\gamma)$, $\tilde{R}'_W(\gamma) = \frac{d}{d\gamma} \tilde{R}_W(\gamma)$. В качестве значения $\tilde{\alpha}_W$ принимается $\tilde{\alpha}_W = 1/\tilde{\gamma}_W$, $\tilde{\gamma}_W = \gamma^{(n)}$, где $\gamma^{(n)}$ удовлетворяет условию

$$\mathcal{G}_{m,\beta/2} \leq \tilde{R}_W(\gamma^{(n)}) \leq \mathcal{G}_{m,1-\beta/2}. \quad (3.1.20)$$

Это означает, что итерационная процедура (3.1.19) прекращается, как только выполнится условие (3.1.20). Напомним, что величины $\mathcal{G}_{m,\beta/2}$, $\mathcal{G}_{m,1-\beta/2}$ – квантили χ^2 -распределения с $m = N_f$ степенями свободы уровней значимости $\beta/2$ и $1-\beta/2$ соответственно. Вычисление квантилей при $N_f > 30$ можно осуществить по формулам (2.3.33) (см. замечание 2.3.1).

С учетом (3.1.6), (3.1.17) эффективный алгоритм вычисления $\tilde{R}_W(\gamma)$, $\tilde{R}'_W(\gamma)$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} \tilde{R}_W(\gamma) &= N \cdot \sum_{l=0}^{N-1} \frac{(1 + \theta |K_{p\alpha}^*(l)|^2) \cdot Q_p(l) \cdot |F_p(l)|^2}{\gamma |\tilde{\Phi}_p(l)|^2 + (1 + \theta |K_{p\alpha}^*(l)|^2) \cdot Q_p(l)}; \quad (3.1.21) \\ \tilde{R}'_W(\gamma) &= -N \cdot \sum_{l=0}^{N-1} \frac{\frac{|\tilde{\Phi}_p(l)|^2 (1 + \theta |K_{p\alpha}^*(l)|^2) \cdot Q_p(l) \cdot |F_p(l)|^2}{\left[\gamma |\tilde{\Phi}_p(l)|^2 + (1 + \theta |K_{p\alpha}^*(l)|^2) \cdot Q_p(l) \right]^2}}{(C_\sigma \sigma_\zeta^2 |K_{p\alpha}^*(l)|^2 + \sigma_\eta^2)} \end{aligned}$$

где $C_\sigma = \frac{N_k}{N_f} \cdot N^2 \cdot \Delta_t^2$ – множитель, устанавливающий связь между дисперсией исходной стационарной последовательности ζ_j и дисперсией коэффициентов ДПФ этой последовательности, а также учитывающий матричное преобразование K_ξ^ξ , входящее в (3.1.23). Коэффициенты ДПФ $K_{p\alpha}^*(l)$ являются решениями нелинейного уравнения (3.1.14) для $l = 0, \dots, N-1$.

Утверждение 3.1.2. Если $\gamma^{(0)}$ удовлетворяет условию

$$\tilde{R}_W(\gamma^{(0)}) > \mathfrak{g}_{m,1-\beta/2}, \quad (3.1.22)$$

то существует конечное значение $\tilde{\alpha}_W$, вычисляемое процедурой (3.1.19) и удовлетворяющее (3.1.16).

Доказательство основано на следующих очевидных свойствах функции $\tilde{R}_W(\gamma)$ и ее производной:

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \tilde{R}_W(\gamma) = 0 \text{ и } \tilde{R}_W(\gamma) > 0, \tilde{R}'_W(\gamma) < 0 \text{ для любых } \gamma > 0.$$

Поэтому итерационная процедура (5.2.19) нахождения корня нелинейного уравнения $R_W(\gamma) = m = N_f$ обязательно определит (при выполнении условия (5.2.22)) значение $\gamma^{(n)}$, удовлетворяющее условию (5.2.20), а следовательно, и значение $\tilde{\alpha}_W = 1/\tilde{\gamma}_W = 1/\gamma^{(n)}$, удовлетворяющее неравенству (3.1.27). ▼

Обычно $\gamma^{(0)} \approx 10^{-15}$ и для вычисления $\tilde{\alpha}_W$ требуется не более 4–5 итераций. Если условие (3.1.22) не выполняется даже при значениях $\gamma^{(0)}$ близких к нулю $\approx 10^{-20}$, то это означает, что правая часть интегрального уравнения обусловлена только погрешностями исходных данных и в этом случае $\alpha_W = \infty$, а регуляризованное решение $k_\alpha(\tau) \equiv 0$.

Заметим, что вычисление параметра регуляризации в пространстве коэффициентов ДПФ существенно экономит вычислительные затраты на построение оценки $\tilde{\alpha}_W$.

Приведем графическую интерпретацию изложенного алгоритма выбора параметра регуляризации. Введем относительную ошибку идентификации как функцию параметра $\gamma = 1/\alpha$:

$$\delta_k(\gamma) = \frac{\|k_\gamma - \bar{k}^+\|}{\|\bar{k}^+\|}. \text{ На рис. 3.1 сплошной линией показана зависи-}$$

мость относительной ошибки идентификации $\delta_k(\gamma)$, точечной кривой – значения $\tilde{R}_w(\gamma)$, штриховыми прямыми – значения $\mathcal{G}_{m,\beta/2}, \mathcal{G}_{m,1-\beta/2}$.

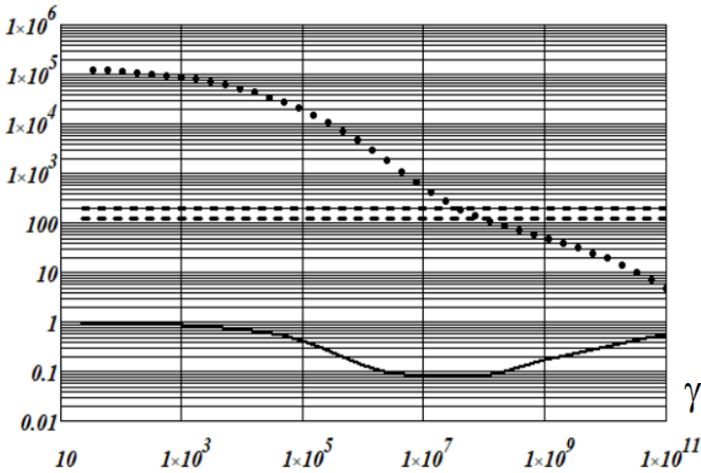


Рис. 3.1. Выбор параметра регуляризации

Значения γ , для которых значения $\tilde{R}_w(\gamma)$ находятся между этими двумя прямыми являются значениями $\tilde{\gamma}_w$ (для них выполняется неравенство (3.1.20)). Видно, что эти значения соответствуют области минимальной ошибки идентификации.

3.1.3. Исследования алгоритма выбора параметра регуляризации

При использовании предложенного алгоритма выбора параметра регуляризации возникают два вопроса:

- каков проигрыш по точности регуляризованного решения задачи идентификации, построенного при $\alpha = \tilde{\alpha}_w$ по сравнению с оптимальным решением, построенном при $\alpha = \tilde{\alpha}_{opt}$?
- какой выигрыш по точности идентификации дает изложенный алгоритм выбора параметра регуляризации по сравнению

с алгоритмом, который не учитывает шум измерения входного сигнала.

Для ответа на эти вопросы были выполнены многочисленные вычислительные эксперименты. Рассмотрим наиболее интересные результаты этих экспериментов.

В качестве импульсной переходной функции использовалась «колебательная» ИПФ2, график которой изображен на рис. 2.4 (кривая 2). Входной сигнал задавался двумя функциями: «узкополосной» – сплошная кривая на рис. 2.5 (обозначим ВХОД1) и «широкополосной» – точечная кривая на рис. 2.5 (обозначим ВХОД2). Напомним, что такой выбор входных сигналов был обусловлен тем, что для широкополосного входного сигнала при прочих равных условиях точность оценивания ИПФ возрастает.

Количество отсчетов идентифицируемой ИПФ равно $N_k = 100$, количество отсчетов входного сигнала $N_\varphi = 60$ и $N = 256$. Шаг дискретизации $\Delta_t = 0.022$. Относительные уровни шума правой части δ_η и шума измерения входного сигнала δ_ξ как и ранее (см. ()) определялись соотношениями: $\delta_\eta = \frac{\|\eta\|}{\|f\|}$, $\delta_\varphi = \frac{\|\xi\|}{\|\varphi\|}$.

Для ответа на первый вопрос вновь обратимся к коэффициенту эффективности, который для зашумленного входного сигнала определим как:

$$E_{\tilde{\alpha}_W} = \frac{\|k_{\tilde{\alpha}_{opt}} - \bar{k}^+\|}{\|\varphi_{\tilde{\alpha}_W} - \bar{k}^+\|}, \quad (3.1.23)$$

где $k_{\tilde{\alpha}_W}$ – регуляризованное решение задачи идентификации, построенное при параметре $\tilde{\alpha}_W$. Напомним, что этот коэффициент является случайной величиной, принимающей значения из интервала $(0,1]$. Значения, близкие к 1 (например, $0.9 \div 0.95$), говорят о небольшом проигрыше по точности, значения меньше 0.5 указывают на значительное (по сравнению с оптимальным решением) увеличением ошибки регуляризованного решения

$\varphi_{\tilde{\alpha}_W}$. Зная числовые характеристики (среднее значение, минимальное и максимальное значения и т.д.) этой случайной величины, можно говорить о применимости исследуемого алгоритма выбора параметра регуляризации.

Для определения числовых характеристик коэффициента эффективности формировалась выборка значений случайной величин $E_W^{(n)}$ (объем выборки $N_{sam} = 50$). Значения случайной величины $E_W^{(n)}$ вычислялись по решениям $k_{\tilde{\alpha}_W}^{(n)}$, построенным при значениях параметра регуляризации $\tilde{\alpha}_W^{(n)}$, вычисленных по зашумленным векторам $\tilde{f}^{(n)} = f + \eta^{(n)}$, $\tilde{\varphi}^{(n)} = \varphi + \xi^{(n)}$ $n=1, 2, \dots, N_{sam}$. По выборке определялись: минимальное $\min_{E_W}$ и среднее значение m_{E_W} , а также строилась гистограмма частот $\omega_W^{(i)} = n_i / N_{sam}$, где n_i – число значений $E_W^{(n)}$ попавших в i -й интервал (количество интервалов гистограммы равно 6).

На рис. 3.2 показана гистограмма частот $\omega_W^{(i)}$, типичная для алгоритма выбора параметра регуляризации на основе критерия оптимальности (ВХОД1, уровень шума $\delta_\eta = 0.05$, $\delta_\xi = 0.1$). Видно, что значения коэффициента E_W в основном сосредоточены в интервале $[0.91, 0.96]$. Об этом же говорят и числовые характеристики коэффициента E_W : $\min_{E_W} = 0.789$, $m_{E_W} = 0.944$, $\max_{E_W} = 0.982$. Гистограмма и эти числовые характеристики позволяют сделать вывод, что регуляризованное решение k_{α_W} имеет в среднем только на 6 % больше ошибку по сравнению с оптимальным регуляризованным решением, построенным при оптимальном параметре регуляризации α_{opt} .

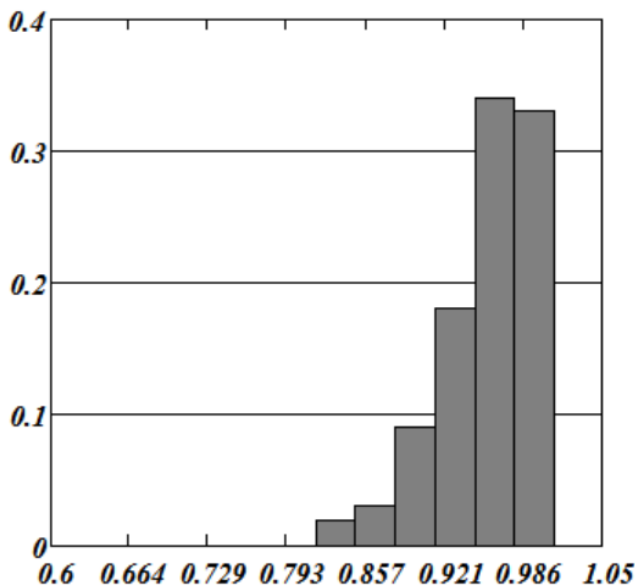


Рис. 3.2. Гистограмма коэффициента эффективности E_w

В табл. 3.1 приведены числовые характеристики коэффициента E_w для разных уровней шума и разных входных сигналов. Первая строка ячейки содержит минимальное значение коэффициента E_w , а вторая строка – среднее значение коэффициента. Анализ таблицы показывает, что: а) при увеличении уровней шумов δ_η и δ_ξ значения коэффициента E_w уменьшается; б) увеличение уровня шума δ_ξ не приводит к уменьшению коэффициента эффективности; в) даже низкочастотного входа ВХОД1 коэффициент E_w принимает высокие значения (хотя норма ошибки регуляризованного решения возрастает по сравнению с высокочастотным входным сигналом ВХОД2).

Таблица 3.1

Входной сигнал	δ_f	Относительный уровень шума входного сигнала δ_φ			
		0.02	0.05	0.10	0.15
ВХОД1	0.02	0.834	0.812	0.792	0.789
		0.945	0.936	0.921	0.911
	0.10	0.861	0.853	0.848	0.811
		0.953	0.943	0.932	0.922
ВХОД2	0.02	0.845	0.831	0.808	0.801
		0.964	0.958	0.943	0.934
	0.10	0.865	0.858	0.851	0.838
		0.961	0.949	0.938	0.928

Для ответа на вопрос какой выигрыш по точности идентификации дает изложенный алгоритм выбора параметра регуляризации был введен коэффициент выигрыша параметра регуляризации $\tilde{\alpha}_w$, определяемый соотношением:

$$K_{\tilde{\alpha}_w} = \frac{\|k_{\alpha_w} - \bar{k}^+\|}{\|k_{\tilde{\alpha}_w} - \bar{k}^+\|}, \quad (3.1.24)$$

где k_{α_w} – регуляризованное решение, построенное при параметре регуляризации α_w , найденном по критерию оптимальности, но без учета шума измерения входного сигнала (статистика (2.4.2)), хотя этот шум присутствовал в входном сигнале, $k_{\tilde{\alpha}_w}$ – регуляризованное решение, построенное при параметре регуляризации $\tilde{\alpha}_w$, вычисленном предлагаемым алгоритмом выбора (статистика (3.1.17)). Если $K_{\tilde{\alpha}_w}$ больше 1, то предпочтительным является выбор параметра регуляризации, предлагаемый алгоритмом, учитывающий шум измерения входного сигнала. Заметим, что коэффициент $K_{\tilde{\alpha}_w}$ является случайной величиной, значение которой меняется от одной реализации шумов измерений к другой. Поэтому в качестве неслучайной характеристики ис-

пользовалось выборочное среднее $K_{\tilde{\alpha}_W}$, определяемое выражением:

$$\bar{K}_{\tilde{\alpha}_W} = \frac{1}{N_{sam}} \sum_{l=1}^{N_{sam}} K_{\tilde{\alpha}_W}^{(l)}$$

где $K_{\tilde{\alpha}_W}^{(l)}$ – коэффициент выигрыша, вычисленный по l -ым реализациям шумов измерений входного и выходного сигналов. Объем выборки в эксперименте $N_{sam} = 50$. В табл. 3.2 приведены значения $\bar{K}_{\tilde{\alpha}_W}$ для двух входных сигналов и разных δ_ξ : (0.02, 0.05, 0.10, 0.15). Относительный уровень шума измерения выходного сигнала $\delta_\eta = 0.02$.

Таблица 3.2

δ_ξ	ВХОД1	ВХОД2
0.02	1.02	1.01
0.05	1.19	1.17
0.10	1.44	1.39
0.15	1.86	1.82

Анализ данных таблицы показывает, что если уровень шума измерения входного сигнала больше уровня шума измерения выходного сигнала, то предпочтительнее оказывается выбор параметра регуляризации, предложенный алгоритмом, построенным на основе критерия оптимальности. При этом, чем больше эта разница, тем больше выигрыш по точности идентификации. Так, для отношения $\delta_\xi / \delta_\eta \geq 7$ точность идентификации увеличивается на примерно на 80%.

В заключении отметим эффект «саморегуляризации», который обуславливается шумом измерения входного сигнала. Для пояснения этого эффекта обратимся к рис. 3.3, на котором пока-

заны графики относительной ошибки $\delta_k(\alpha) = \frac{\|k_\alpha - \bar{k}^+\|}{\|\bar{k}^+\|}$ для

ВХОД1: сплошная кривая соответствует относительным уровням шумов измерения $\delta_\eta = 0.02$, $\delta_\xi = 0.0$ (входной сигнал задан точно); штриховая – $\delta_\eta = 0.02$, $\delta_\xi = 0.1$. Эффект «саморегуляризации» состоит в следующем: в области малых значений параметра регуляризации ошибки решений при неточно заданном входе (рис. 3.3, штриховая кривая) меньше ошибок решений при точном входном сигнале (рис. 3.3, сплошная кривая). Величина такого уменьшения пропорциональна уровню шума входного сигнала. Этот эффект можно объяснить тем, что при малых α случайный шум входного сигнала выполняет своеобразную регуляризацию – квадраты $|\tilde{\Phi}_p(l)|^2$ коэффициентов ДПФ зашумленного ядра при больших значений l превалируют в знаменателе выражения (2.3.9) над значениями стабилизатора $\alpha Q_p(l)$ и это уменьшает ошибку вычисления $K_{p\alpha}(l)$ для этих значений l и, соответственно, вызывает уменьшение общей ошибки регуляризованного решения.

Приведенные результаты вычислительного эксперимента показывают, что для схем идентификации ИПФ стационарных динамических объектов, где уровень шума измерения входного сигнала существенно выше уровня шума выходного сигнала, следует использовать предлагаемый в этом параграфе регуляризирующий алгоритм и алгоритм оценивания оптимального параметра регуляризации, характерной чертой которых является учет дисперсии шума измерения входного сигнала. Эти алгоритмы в качестве вычислительной основы используют ДПФ, что обуславливает их высокую вычислительную эффективность.

Пример использования построенного регуляризирующего алгоритма на практике приведен в работах [17,18], где решается задача идентификации параметров схемы замещения электрического разряда.

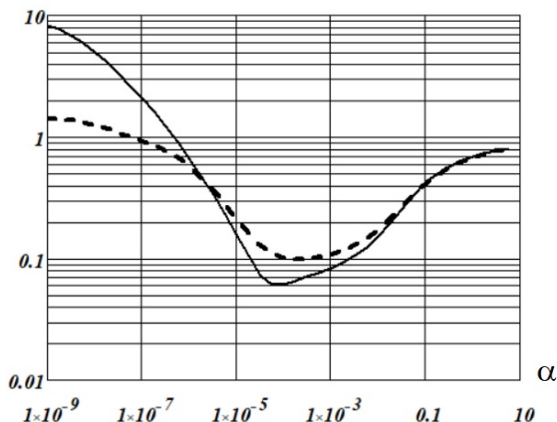


Рис.3.3. Графики относительных ошибок идентификации

3.2. Локальный регуляризирующий алгоритм идентификации с зашумленным входным сигналом

В параграфе 3.1 был предложен регуляризирующий алгоритм, который учитывал эти шумы как при построении устойчивого решения, так и при оценивании оптимального параметра регуляризации. Однако, наличие только одного «управляющего» параметра – параметра регуляризации не позволяет подобрать для каждого коэффициента ДПФ решения свой регуляризирующий множитель, минимизирующий ошибку вычисления этого коэффициента и всего регуляризованного решения в целом. Поэтому в данной параграфе предлагается оригинальный подход к нахождению для каждого коэффициента ДПФ регуляризованного решения своего квазиоптимального регуляризирующего множителя из условия минимума среднеквадратической ошибки идентификации.

3.2.1. Оптимальный регуляризирующий алгоритм идентификации

Как и ранее предполагаем, что выходной и входной сигналы динамической системы измерены в дискретные моменты времени со случайными погрешностями (шумами):

$$\tilde{f}(t_i) = f(t_i) + \eta(t_i); \quad \tilde{\varphi}(\tau_j) = k(\tau_j) + \xi(\tau_j),$$

где $\eta(t_i), \xi(\tau_j)$ - случайные величины с нулевым средним и дисперсиями $\sigma_\eta^2, \sigma_\xi^2$ соответственно, некоррелированные друг с другом. Шаг дискретизации по аргументам t, τ одинаков и равен Δ_t .

Работу регуляризирующего алгоритма можно представить следующими шагами:

Шаг 1. Формирование периодических с периодом N последовательностей:

$$\tilde{\varphi}_p(j) = \begin{cases} \tilde{\varphi}(j \cdot \Delta_t) \cdot \Delta_t, & j = 0, \dots, N_\varphi - 1; \\ 0, & j = N_\varphi, N_\varphi + 1, \dots, N - 1. \end{cases}$$

$$\tilde{f}_p(j) = \begin{cases} \tilde{f}(j \cdot \Delta_t), & j = 0, \dots, N_f - 1; \\ 0, & j = N_f, N_f + 1, \dots, N - 1. \end{cases}$$

Шаг 2. Вычисление последовательности

$$\tilde{\Phi}_p(l) = \sum_{j=0}^{N-1} \tilde{\varphi}_p(j) \exp\left(-\frac{2\pi i}{N} \cdot jl\right), \quad l = 0, \dots, N - 1,$$

где $i = \sqrt{-1}$.

Шаг 3. Вычисление коэффициентов ДПФ последовательности $\{\tilde{f}_p(j)\}$ (прямое ДПФ):

$$\tilde{F}_p(l) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \tilde{f}_p(j) \exp\left(-\frac{2\pi i}{N} l j\right), \quad l = 0, \dots, N - 1.$$

Шаг 4. Определение коэффициентов ДПФ (обозначаемые как $K_{p\alpha}(l)$) регуляризованного решения.

Шаг 5. Вычисление периодического регуляризованного решения (обратное ДПФ):

$$k_{p\alpha}(j) = \sum_{\ell=0}^{N-1} K_{p\alpha}(\ell) \exp\left(\frac{2\pi i}{N} \cdot \ell j\right), \quad j = 0, \dots, N-1.$$

Шаг 6. Формирование N_k -мерного вектора k_α по правилу:

$$k_{\alpha j} = k_{p\alpha}(j-1), \quad j = 1, \dots, N_k,$$

где $N_k = N_f - N_\varphi + 1$.

Если выполнено условие

$$N \geq N_f + N_\varphi - 1, \quad (3.2.1)$$

то проекции вектора $k_{\alpha j}$ принимаются в качестве значений регуляризованного решения $k_\alpha(\tau)$ в узлах $\tau_j = j \cdot \Delta_t$, $j = 0, \dots, N_k - 1$.

Очевидно, что точность регуляризованного решения определяется способом вычисления коэффициентов $K_{p\alpha}(l)$ на втором шаге, которые будем находить в виде:

$$K_{pq}(l) = \frac{\tilde{\Phi}_p^c(l)}{\left|\tilde{\Phi}_p(l)\right|^2 + q_p(l)} \cdot F_p(l), \quad l = 0, \dots, N-1, \quad (3.2.2)$$

где $q_p(l)$ - стабилизирующий член, определяемый ниже. Определим коэффициенты ДПФ точного решения выражением (???) и обозначим как $\bar{K}_p(l)$. Ошибку оценивания коэффициента $\bar{K}_p(l)$ определим условным математическим ожиданием

$$\Delta_{pq}(l) = M \left[\left| K_{pq}(l) - \bar{K}_p(l) \right|^2 / \tilde{\Phi}_p(l) \right] \quad (3.2.3)$$

при заданном коэффициенте ДПФ $\tilde{\Phi}_p(l)$ входного сигнала идентифицируемой системы. Справедливо

Утверждение 3.2.1. Если случайные величины $\eta(t_i)$, $\xi(\tau_j)$ не коррелированы между собой и отсутствует корреляция в соседние моменты времени, то

$$\Delta_{pq}(l) = \frac{\left[\sigma_{Z_p}^2 |\bar{K}_p(l)|^2 + \sigma_{H_p}^2 \right] |\Phi_p(l)|^2 + q_p^2(l) |\bar{K}_p(l)|^2}{\left[|\Phi_p(l)|^2 + q_p(l) \right]^2}, \quad (3.2.4)$$

где $\sigma_{Z_p}^2$, $\sigma_{H_p}^2$ - дисперсии коэффициентов ДПФ периодических последовательностей $\{\xi_p(i)\}, \{\eta_p(i)\}$, которые зависят от дисперсий $\sigma_\xi^2, \sigma_\eta^2$ следующим образом (см. (2.1.14)):

$$\sigma_{Z_p}^2 = \frac{N_\varphi}{N^2} \sigma_\xi^2; \quad \sigma_{H_p}^2 = \frac{N_f}{N^2} \sigma_\eta^2, \quad (3.2.5)$$

где N_f, N_φ - количество отсчетов функций $\tilde{f}(t), \tilde{\varphi}(\tau)$.

Доказательство. Обозначим через $H_p(l)$ - коэффициенты ДПФ случайной последовательности $\{\eta_p(i)\}$, а $Z_p(l)$ - коэффициенты ДПФ последовательности $\{\xi_p(i)\}$. Тогда ошибку $E_p(l) = K_{pq}(l) - \bar{K}_p(l)$ можно представить выражением

$$E_p(l) = \frac{-\tilde{\Phi}_p^c(l) Z_p(l) \bar{K}_p(l) + \tilde{\Phi}_p^c(l) H_p(l) - q_p(l) \bar{K}_p(l)}{|\tilde{\Phi}_p(l)|^2 + q_p(l)}.$$

Возведем левую и правую части этого выражение в квадрат и вычислим условное математическое ожидание

$$\Delta_{pq}(l) = M \left[|E_p(l)|^2 / \tilde{\Phi}_p(l) \right]. \text{ Получаем}$$

$$\Delta_{pq}(l) = \frac{|\tilde{\Phi}_p^c(l)|^2 \left\{ M \left[|Z_p(l)|^2 \right] |\bar{K}_p(l)|^2 + M \left[|H_p(l)|^2 \right] \right\} + q_p^2(l) \left[|\bar{K}_p(l)|^2 \right]}{\left[|\tilde{\Phi}_p(l)|^2 + q_p(l) \right]^2}$$

Введя обозначения дисперсий для коэффициентов ДПФ случайных последовательностей $\{\xi_p(i)\}, \{\eta_p(i)\}$:

$$\sigma_{Z_p}^2 = M \left[|Z_p(l)|^2 \right], \quad \sigma_{H_p}^2 = M \left[|H_p(l)|^2 \right],$$

приходим к выражению (3.2.4). ▼

Для минимизации среднеквадратической ошибки регуляризованного решения достаточно минимизировать $\Delta_{pq}(l)$ для каждого $l = 0, \dots, N-1$. Беря частную производную от (5) по $q_p(l)$ и приравнявая эту производную нулю, получаем

Утверждение 3.2.2. Минимум $\Delta_{pq}(l)$ достигается при

$$q_{\text{порт}}(l) = \sigma_{Z_p}^2 + \frac{\sigma_{H_p}^2}{|\bar{K}_p(l)|^2} \quad (3.2.6)$$

и коэффициенты ДПФ оптимального регуляризованного решения, имеющего наименьшую среднеквадратическую ошибку $\Delta_{pq}(l)$ определяются выражением

$$K_{\text{порт}}(l) = \frac{\tilde{\Phi}_p^c(l)}{|\tilde{\Phi}_p(l)|^2 (1 + S_\zeta(l) + S_\eta(l))} F_p(l), \quad (3.2.7)$$

где $\tilde{\Phi}_p^c(l)$ - величина, комплексно сопряженная с $\tilde{\Phi}_p(l)$;

$$S_{\text{орт}}(l) = S_\zeta(l) + S_\eta(l) = \frac{\sigma_{Z_p}^2}{|\tilde{\Phi}_p(l)|^2} + \frac{\sigma_{H_p}^2}{|\tilde{\Phi}_p(l)|^2 \cdot |\bar{K}_p(l)|^2}. \quad (3.2.8)$$

Соотношение $S_\zeta(l)$ можно трактовать как отношение «шум/сигнал» для коэффициентов ДПФ входного сигнала, а

второе $S_\eta(l)$ - «шум/сигнал» для коэффициентов ДПФ выходного сигнала. Алгоритм (3.2.7) вычисления коэффициентов ДПФ искомого решения можно назвать «винеровским алгоритмом идентификации», так как он минимизирует среднеквадратическую ошибку (3.2.3). Очевидно, что, взяв обратное ДПФ от коэффициентов (3.2.7), каждый из которых имеет минимальную среднеквадратическую ошибку, получим оценку для импульсной переходной функции динамической системы с наименьшей среднеквадратической ошибкой.

К сожалению, алгоритм (3.2.7) не реализуем на практике, так как в отношении «шум/сигнал» выходного сигнала (второе слагаемое в (3.2.8)) входят неизвестные коэффициенты ДПФ $\bar{K}_p(l)$ искомой импульсной переходной функции. Заметим, что такая же ситуация возникает и в «классическом» винеровском алгоритме фильтрации случайных процессов, где требуется априорное знание спектральной плотности выделяемого случайного процесса. Возникает традиционный вопрос: «Что делать?». Для ответа на этот вопрос предлагается итерационная процедура апостериорного уточнения отношения $S_\eta(l)$, которая является нетривиальным обобщением процедуры уточнения отношения «шум/сигнал», успешно используемой при вычислении регуляризованного решения обратной измерительной задачи при точно заданном ядре интегрального уравнения (см. [10,92]).

3.2.2. Итерационный алгоритм уточнения отношения «шум/сигнал»

Так как отношение «шум/сигнал» коэффициентов ДПФ выходного сигнала $S_\eta(l)$ (в уравнении (3.2.8) это второе слагаемое) зависит от неизвестного коэффициента ДПФ $\bar{K}_p(l)$ точного решения, то предлагается следующая итерационная процедура апостериорного уточнения этого отношения, которая выполняется при вычислении каждого коэффициента ДПФ, т.е. для $l = 0, \dots, N-1$. Эта процедура является обобщением итерацион-

ных процедур уточнения отношений «шум/сигнал», предложенных для локальных регуляризирующих алгоритмов решения плохо обусловленных СЛАУ [10, 60, 61,92,93] и решения обратных измерительных задач [95,96,96] при точно заданной импульсной переходной функции (ядро интегрального уравнения Вольтера первого рода).

Введем величины

$$S_{\eta}(l) = \sigma_{H_p}^2 / \left| \tilde{F}_p(l) \right|^2, \quad S_{\eta}^{(0)}(l) = \sigma_{H_p}^2 / \left[\left| \tilde{\Phi}_p(l) \right|^2 \left| K_p^{(0)}(l) \right|^2 \right], \quad (3.2.9)$$

где $K_p^{(0)}(l)$ - коэффициенты ДПФ «начальной» оценки $\hat{k}_p^{(0)}$ для искомой импульсной переходной функции (ее определение будет рассмотрено ниже). Перепишем выражение (3.2.7) в виде:

$$K_{port}(l) = \frac{\tilde{\Phi}_p^c(l)}{\left| \tilde{\Phi}_p(l) \right|^2 (1 + S_{\zeta}(l) + S_{\eta}(l))} F_p(l), \quad (3.2.10)$$

и подставим $S_{\eta}^{(0)}(l)$ в это выражение вместо $S_{\eta}(l)$. Получим коэффициенты ДПФ на первой итерации

$$K_p^{(1)}(l) = \frac{\tilde{\Phi}_p(l)}{\left| \tilde{\Phi}_p(l) \right|^2 (1 + S_{\zeta}(l) + S_{\eta}^{(0)}(l))} F_p(l).$$

Подставляя коэффициент $K_p^{(1)}(l)$ в отношение «шум/сигнал» выходного сигнала, получаем оценку

$$S_{\eta}^{(1)}(l) = \sigma_{H_p}^2 / \left[\left| \tilde{\Phi}_p(l) \right|^2 \left| K_p^{(1)}(l) \right|^2 \right].$$

Продолжая такое итерационное уточнение отношения «шум/сигнал», получаем следующую итерационную процедуру:

$$K_p^{(n+1)}(l) = \frac{\tilde{\Phi}_p(l)}{\left| \tilde{\Phi}_p(l) \right|^2 (1 + S_\xi(l) + S_\eta^{(n)}(l))} F_p(l), \quad (3.2.11)$$

$$S_\eta^{(n)}(l) = \frac{\sigma_{H_p}^2}{\left| \tilde{\Phi}_p(l) \right|^2 \left| K_p^{(n)}(l) \right|^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.2.12)$$

Возникает вопрос о сходимости этой итерационной процедуры уточнения отношения «шум/сигнал» выходного сигнала. Можно показать, что предельные точки этой процедуры определяются корнями $S_\eta^*(l)$ нелинейного уравнения

$$S_\eta^*(l) = \left[1 + S_\xi(l) + S_\eta^*(l) \right] \cdot \tilde{S}_\eta(l).$$

Выполнив несложные преобразования, приходим к квадратному уравнению:

$$(S_\eta^*(l))^2 + \left[2(1 + S_\xi(l)) - \frac{1}{S_\eta(l)} \right] S_\eta^*(l) + (1 + S_\xi(l))^2 = 0, \quad (3.2.13)$$

корни которого обозначим как $S_{\eta 1}^*(l), S_{\eta 2}^*(l)$, при этом $S_{\eta 1}^*(l) \leq S_{\eta 2}^*(l)$. Эти корни равны:

$$S_{\eta 1}^*(l) = \frac{1 - 2(1 + S_\xi) \tilde{S}_\eta - \sqrt{1 - 4(1 + S_\xi) \tilde{S}_\eta}}{2 \tilde{S}_\eta};$$

$$S_{\eta 2}^*(l) = \frac{1 - 2(1 + S_\xi) \tilde{S}_\eta + \sqrt{1 - 4(1 + S_\xi) \tilde{S}_\eta}}{2 \tilde{S}_\eta},$$

при очевидном условии их вещественности

$$(1 + S_\xi) \tilde{S}_\eta \leq \frac{1}{4}.$$

Тогда из выражений (3.2.7), (3.2.8) следует

Утверждение 3.2.3. Предельная точка K_p^* итерационной процедуры (3.2.11), (3.2.12) определяется выражением:

$$K_p^*(l) = \begin{cases} \frac{\tilde{\Phi}_p^c(l)}{|\tilde{\Phi}_p(l)|^2 (1 + S_\zeta(l) + S_{\eta 1}^*(l))} F_p(l), & \text{если } S_\eta^{(0)} < S_{\eta 2}^*(l), \\ & \text{и } \tilde{S}_\eta(l)(1 + S_\zeta(l)) \leq \frac{1}{4}; \\ \frac{\tilde{\Phi}_p^c(l)}{|\tilde{\Phi}_p(l)|^2 (1 + S_\zeta(l) + S_{\eta 2}^*(l))} F_p(l), & \text{если } S_\eta^{(0)} = S_{\eta 2}^*(l), \\ & \text{и } \tilde{S}_\eta(l)(1 + S_\zeta(l)) \leq \frac{1}{4}; \\ 0, & \text{если } S_\eta(l)(1 + S_\zeta(l)) \leq \frac{1}{4}, \quad S_\eta^{(0)} > \widehat{S_2(l)}; \\ 0, & \text{если } \widehat{S_\eta(l)}(1 + S_\zeta(l)) > \frac{1}{4}. \end{cases} \quad (3.2.14)$$

Доказательство этого утверждения проводится аналогично доказательству в работах [10,92], но с учетом отношения «шум/сигнал» входного сигнала идентифицируемой системы.



Взяв обратное ДПФ от последовательности $\{K_p^*(l)\}$, получаем периодическую последовательность $\{k_p^*(i)\}$, из которой формируется оценка $k^*(\tau_i)$ для импульсной переходной функции динамической системы в дискретные моменты времени:

$$k^*(\tau_i) = k_p^*(i), i = 0, \dots, N_k - 1.$$

Заметим, что соотношение (3.2.14) позволяет, не выполняя итераций (3.2.11), (3.2.12), сразу вычислить предельную точку итерационной процедуры, что существенно уменьшает затраты на вычисления коэффициентов ДПФ $K_p^*(l)$.

Для того, чтобы предлагаемый локальный алгоритм идентификации был регуляризирующим необходимо убедиться в

сходимости решения $k^*(\tau)$ к «точной» ИПФ $\bar{k}(\tau)$ при стремлении уровней шумов измерений входного и выходного сигналов идентифицируемой системы к нулю. Определим среднеквадратическую сходимость построенного решения как:

$$M \left[\|k^* - \bar{k}^+\|^2 \right] \rightarrow 0 \text{ при } \sigma_\eta^2, \sigma_\xi^2 \rightarrow 0. \quad (3.2.15)$$

Утверждение 3.2.4. Если начальный вектор $k^{(0)}$, составленный из значений $k^{(0)}(\tau_i)$ «стартовой» функции $k^{(0)}(\tau)$, сходится в среднеквадратическом к вектору точного решения $\bar{k}^+$, т.е.

$$M \left[\|k^{(0)} - \bar{k}^+\|^2 \right] \rightarrow 0 \text{ при } \sigma_\eta^2, \sigma_\xi^2 \rightarrow 0, \quad (3.2.16)$$

то имеет место сходимость (3.2.15).

Доказательство этого утверждения проводится аналогично доказательству в работах [10,92], но с учетом отношения «шум/сигнал» входного сигнала идентифицируемой системы. ▼

Таким образом, предложенный алгоритм построения решения является регуляризирующим и его можно назвать *квази-оптимальным локальным регуляризирующим алгоритмом*. Слово квазиоптимальный отражает итерационное уточнение отношения «шум/сигнал» выходного сигнала идентифицируемой системы.

3.2.3. *Исследование локального алгоритма идентификации*

Для обоснованного применения предложенного локального алгоритма идентификации на практике необходимо ответить на вопрос: как соотносятся между собой ошибки идентификации локальным регуляризирующим алгоритмом и глобальным регуляризирующим алгоритма, изложенный в параграфе 3.1, который также учитывает шум измерения входного сигнала как при нахождении устойчивого решения, так и при выборе параметра

регуляризации. Для ответа на этот вопрос был проведен обширный вычислительный эксперимент по построению регуляризованных решений двумя этими алгоритмами и сравнению ошибок этих решений. Остановимся на некоторых результатах этого эксперимента (более подробно см. [42]).

В качестве импульсной переходной функции использовались два вида функций, графики которых приведены на рисунке 2.4: «гладкая» ИПФ – кривая 1 (будем обозначать ИПФ1); «колебательная» ИПФ – кривая 2 (ИПФ2). Входной сигнал задавался двумя функциями: «узкополосным» – кривая 1 на рисунке 2.5 (обозначим ВХОД1) и «широкополосным» – кривая 2 на рисунке 2.5 (обозначим ВХОД2). Такой выбор входных сигналов был обусловлен тем, что для широкополосного сигнала при прочих равных условиях точность оценивания ИПФ возрастает. Количество отсчетов $k(\tau_j) N_k = 100$, количество отсчетов входного сигнала $\varphi(\tau_j) N_\varphi = 60$, $N_f = N_\varphi + N_k - 1 = 159$ и $N = 256$. Шаг дискретизации $\Delta = 0.022$. Относительные уровни шума правой части δ_η и шума измерения входного сигнала δ_ξ как и ранее (см.

()) определялись соотношениями: $\delta_\eta = \frac{\|\eta\|}{\|f\|}$, $\delta_\varphi = \frac{\|\xi\|}{\|\varphi\|}$. Для сопоставления двух ошибок идентификации введем коэффициент выигрыша K_* локального алгоритма идентификации, определяемый соотношением:

$$K_* = \frac{\|k_{\tilde{a}_W} - \bar{k}^+\|}{\|k^* - \bar{k}^+\|}. \quad (3.2.17)$$

Если $K_* > 1$, то предпочтение следует отдать локальному алгоритму идентификации, в противном случае – глобальному алгоритму.

Заметим, что коэффициент K_* является случайной величиной, значение которой меняется от одной реализации шумов измерений к другой. Поэтому в качестве неслучайной характери-

стики использовалось выборочное среднее $\bar{K}_*$, определяемое выражением:

$$\bar{K}_* = \frac{1}{N_{sam}} \sum_{l=1}^{N_{sam}} K_*^{(l)},$$

где $K_*^{(l)}$ - коэффициент эффективности, вычисленный по l -ой реализации шумов измерений. Объем выборки в эксперименте $N_{sam} = 50$.

В параграфе 2.4, а также в работе [42] было показано, что:

- большее влияние на ошибку идентификации оказывает уровень шума измерения выходного сигнала, чем уровень шума входного сигнала;

- если уровень шума измерения входного сигнала меньше или соизмерим с уровнем шума выходного сигнала, то значения параметров регуляризации при которых достигаются минимальные ошибки идентификации практически совпадают как для точно заданного, так и неточно заданного входных сигналов (хотя сами ошибки идентификации различны).

Поэтому в вычислительном эксперименте принимался высокий относительный уровень шума входного сигнала $\delta_\xi = 0.10$ (чтобы влияние этого шума на ошибку идентификации проявилось в полной мере), а уровни шума выходного сигнала δ_η задавались равными 0.02, 0.05, 0.10.

В таблице 3.3 приведены средние значения коэффициента эффективности $\bar{K}_{eff}$ при идентификации ИПФ1 с двумя входными сигналами ВХОД1 и ВХОД2, а в таблице 3.4 – при идентификации ИПФ2.

Таблица 3.3

Уровень шума δ_η	Значения коэффициента выигрыша $\bar{K}_*$	
	ВХОД1	ВХОД2
0.02	1.12	1.15
0.05	1.09	1.11
0.10	1.05	1.06

Таблица 3.4

Уровень шума δ_f	Значения коэффициента выигрыша $\bar{K}_*$	
	ВХОД1	ВХОД2
0.02	1.14	1.15
0.05	1.11	1.12
0.10	1.07	1.08

Анализируя приведенные значения $\bar{K}_*$, можно сделать следующие выводы:

- для всех уровней шума правой части и используемых входных сигналов более предпочтительным является локальный регуляризирующий алгоритм идентификации (т.к. $\bar{K}_* > 1$);
- по мере увеличения уровня шума измерения правой части значение коэффициента выигрыша уменьшается, но он остается больше 1.

Обобщая выше изложенное можно сделать вывод, что предложенный локальный регуляризирующий алгоритм идентификации имеет высокую вычислительную эффективность, обусловленную как алгоритмом быстрого преобразования Фурье (для вычисления прямого и обратного ДПФ), так и алгоритмом вычисления коэффициентов ДПФ регуляризованного решения (достаточно простые скалярные вычисления). Он позволяет строить устойчивые решения с ошибками, меньше чем ошибки регуляризованных решений, зависящие только от одного параметра регуляризации.

3.3. Двухэтапный алгоритм идентификации

В данном параграфе работе предлагается двухэтапный устойчивый алгоритм непараметрической идентификации импульсной переходной функции стационарной динамической системы в случае, когда и входной и выходной сигналы идентифицируемой системы регистрируются со случайными погрешностями. На первом этапе осуществляется вейвлет-фильтрация шумов измерения, а на втором этапе – построение регуляризованного решения «традиционным» РА по «отфильтрованным» значениям входного и выходного сигналов идентифицируемой системы [43].

3.3.1. Влияние шумов измерений на ошибку регуляризованных решений

Как и ранее предполагаем, что входной и выходной сигнал идентифицируемой системы измеряются с шумами:

$$\tilde{f}_i = \tilde{f}(t_i) = f(t_i) + \eta(t_i), \quad \tilde{\varphi}_j = \varphi(\tau_j) + \xi(\tau_j), \quad (3.3.1)$$

где $\eta(t_i)$, $\xi(\tau_j)$ – случайные, не коррелированные друг с другом величины с нулевыми средними и дисперсиями σ_η^2 , σ_ξ^2 . Для построения устойчивого решения задачи идентификации обратимся к регуляризирующему алгоритму, изложенному в пункте 2.4.1. В этом алгоритме используются зашумленные данные (3.3.1), но выбор параметра регуляризации осуществляется на основе критерия оптимальности, но без учета статистики шума измерения входного сигнала (подробнее см. пункт 2.4.1).

В операторной форме этот регуляризирующий алгоритм можно представить в виде:

$$\tilde{k}_\alpha = F^{-1} \left\{ R_\alpha \left[F(\tilde{\varphi}), F(\tilde{f}) \right] \right\}, \quad (3.3.2)$$

где $F(\tilde{\varphi})$, $F(\tilde{f})$ – прямое ДПФ измеренных входного и выходного сигналов, $R_{\alpha_W}(\cdot)$ – вычисление регуляризованных ко-

эффицентов ДПФ ИПФ (реализация алгоритма пункта 2.4.1), где используются ДПФ зашумленных входного и выходного сигналов, $F^{-1}(\cdot)$ – обратное дискретное преобразование Фурье. Для определения влияния на ошибку регуляризованного решения (3.3.2) шумов измерения входного и выходного сигналов был выполнен следующий вычислительный эксперимент.

В качестве импульсной переходной функции идентифицируемой системы использовались «колебательная» ИПФ, а в качестве входных сигналов использовались ВХОД1 и ВХОД2, описанные в пункте 3.2.4. Количество отсчетов $N_k = 100$, количество отсчетов входного сигнала $N_\varphi = 60$, $N_f = N_\varphi + N_k - 1 = 159$ и $N = 256$. Шаг дискретизации $\Delta_t = 0.022$. Относительные уровни шума правой части δ_η и шума измерения входного сигнала δ_ξ

как и ранее определялись соотношениями: $\delta_\eta = \frac{\|\eta\|}{\|f\|}$, $\delta_\varphi = \frac{\|\xi\|}{\|\varphi\|}$.

Точность построенного регуляризованного решения (3.3.2) определялась относительной ошибкой идентификации

$\delta_{\tilde{k}}(\alpha) = \frac{\|\tilde{k}_\alpha - \bar{k}^+\|}{\|\bar{k}^+\|}$. В таблице 3.5 представлены средние значения

$\bar{\delta}_{k_{\min}}$ (объем выборки был равен 50) минимальной относительной ошибки идентификации $\delta_{k_{\min}} = \delta_{\tilde{k}}(\alpha_{opt})$, вычисленной при разных значениях δ_ξ (первый столбец таблицы), δ_η (первая строка таблицы). На вход системы подавался сигнал ВХОД1.

Таблица 3.5

$\delta_\xi \backslash \delta_\eta$	0.00	0.02	0.05	0.075	0.10	0.15
0.00	10^{-5}	0.08	0.097	0.108	0.122	0.141
0.02	0.049	0.082	0.098	0.109	0.122	0.141
0.05	0.066	0.087	0.101	0.112	0.124	0.143
0.075	0.076	0.092	0.106	0.114	0.127	0.145
0.10	0.082	0.098	0.109	0.120	0.131	0.150
0.15	0.098	0.109	0.120	0.129	0.139	0.159

Анализ данных этой таблицы позволяет сделать весьма важный вывод о том, что шум измерения входного сигнала в меньшей степени влияет на ошибку идентификации, чем шум измерения выходного сигнала идентифицируемой системы. Для количественной оценки такого влияния были вычислены две последовательности первых конечных разностей.

$$1. \text{ Последовательность } \left\{ \Delta_{\eta}^{(i)} = \frac{\bar{\delta}_{k_{\min}}^{(i+1)} - \bar{\delta}_{k_{\min}}^{(i)}}{\delta_{\eta}^{(i+1)} - \delta_{\eta}^{(i)}} \right\}, \quad i = 1, \dots, 5, \text{ где}$$

$\bar{\delta}_{k_{\min}}^{(i)}$ – среднее значение относительной ошибки идентифика-

ции при уровне шума выходного сигнала $\delta_{\eta}^{(i)}$, равному значению i – ому элемента последовательности $\{0.0, 0.02, 0.05, 0.075, 0.10, 0.15\}$ при заданном уровне шума вход-

ного сигнала. Очевидно, что $\Delta_{\eta}^{(i)}$ это приближенное значение частной производной от относительной ошибки идентификации по относительному уровню шума выходного сигнала при значении $\delta_{\eta}^{(i)}$. Поэтому $\Delta_{\eta}^{(i)}$ можно трактовать как коэффициент чув-

ствительности относительной ошибки идентификации к уровню шума выходного сигнала.

$$2. \text{ Последовательность } \left\{ \Delta_{\varphi}^{(i)} = \frac{\bar{\delta}_{k_{\min}}^{(i+1)} - \bar{\delta}_{k_{\min}}^{(i)}}{\delta_{\xi}^{(i+1)} - \delta_{\xi}^{(i)}} \right\}, \quad i=1, \dots, 5,$$

где $\bar{\delta}_{k_{\min}}^{(i)}$ – среднее значение относительной ошибки идентификации при уровне шума входного сигнала $\delta_{\xi}^{(i)}$, равному значению i – ому элемента последовательности $\{0.0, 0.02, 0.05, 0.075, 0.10, 0.15\}$ и фиксированном уровне шума выходного сигнала. По аналогии $\Delta_{\varphi}^{(i)}$ можно рассматривать как приближенное значение частной производной от относительной ошибки идентификации по относительному уровню шума входного сигнала при значении $\delta_{\xi}^{(i)}$. А также $\Delta_{\varphi}^{(i)}$ можно трактовать как коэффициент чувствительности относительной ошибки идентификации к уровню шума входного сигнала. На рис. 3.4 приведены графики следующих величин: кривая 1 – значения $\Delta_f^{(i)}$ при $\delta_{\xi}^{(i)}=0.02$; кривая 2 – значения $\Delta_{\varphi}^{(i)}$ при $\delta_{\eta}^{(i)}=0.02$.

Видно, что коэффициент чувствительности к шуму выходного сигнала в несколько раз (иногда и на порядок) выше по сравнению с коэффициентом чувствительности к шуму измерения входного сигнала.

Аналогичные вычислительные эксперименты были проведены и в случае высокочастотного входного сигнала (ВХОД2). Результаты обработки результатов этих экспериментов позволяют сделать выводы, аналогичные выводам для ВХОД1.

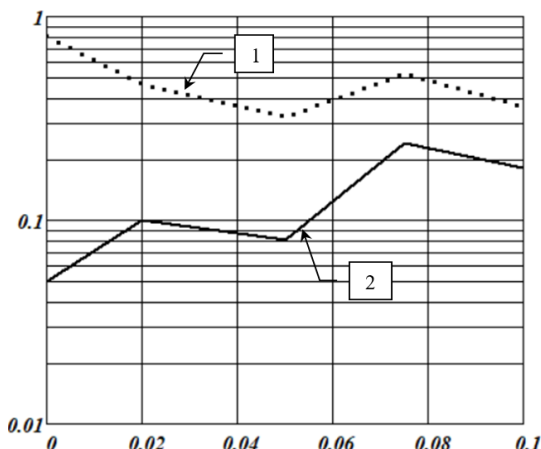


Рис. 3.4. Значения элементов последовательностей $\Delta_{\varphi}^{(i)}$, $\Delta_f^{(i)}$

Таким образом, из результатов выполненных исследований следует вывод о необходимости в первую очередь осуществить фильтрацию выходного сигнала идентифицируемой системы.

3.3.2. Вейвлет-фильтрация шумов измерения

Так как ошибка идентификации зависит от уровней шумов измерений входного и выходного сигналов, то для уменьшения уровней шумов входного или выходного сигналов предлагается использовать пороговые алгоритмы вейвлет- фильтрации. Эти алгоритмы позволяют с меньшей систематической ошибкой (по сравнению с алгоритмами Фурье-фильтрации) фильтровать шумы различной статистической природы и имеют высокую вычислительную эффективность. Поэтому в этом пункте кратко изложим суть алгоритмов вейвлет-фильтрации.

Алгоритмы основаны на следующем многомасштабном представлении сигнала $f(x)$ [86,87]:

$$\hat{f}(x) = \sum_k a_{j_0+J,k} \varphi_{j_0+J,k}(x) + \sum_{j=j_0+1}^{j_0+J} \sum_k d_{j,k} \psi_{j,k}(x), \quad (3.3.2)$$

которое можно интерпретировать как восстановление сигнала $f(x)$ по его коэффициентам разложения на J -ом уровне. Систему ортогональных функций $\{\varphi_{j,k}(x)\}$ называют масштабирующими (или отцовскими), а ортогональные функции $\{\psi_{j,k}(x)\}$ – вейвлет-функциями (или материнскими). Переменная j характеризует уровень разложения и ее часто называют коэффициентом масштаба, переменная k – временной сдвиг той или иной базисной функции, величина J – задает количество уровней разложения, j_0 – начальный уровень разложения (подробнее см. [27]). Коэффициенты разложения $a_{j,k}$ называют аппроксимирующими, $d_{j,k}$ – детализирующими и они определяются выражениями:

$$a_{j,k} = \int f(x)\varphi_{j,k}(x)dx, \quad d_{j,k} = \int f(x)\psi_{j,k}(x)dx. \quad (3.3.4)$$

В пакете MathCAD (расширение *Wavelet Extension*), включен набор функций (более 10) вычисляющие значения вейвлетов для заданного масштаба и сдвига. Эти функции полезны для визуализации вейвлетов. Рассмотрим синтаксис следующих 3 функций:

$wavelet(x, j, k, m, s);$

$father(x, [j, k,]ss);$

$mother(x, [j, k,]ss).$

Функция *wavelet* вычисляет значение в точке x отцовского вейвлета ($m=0$) или материнского вейвлета ($m=1$).

Функция *father* вычисляет значение в точке x отцовского вейвлета.

Функция *mother* вычисляет значение в точке x материнского вейвлета.

Формальные параметры этих функций:

- x – вещественная величина, в которой вычисляется значение вейвлета;

- j – целая величина, определяющая масштаб вейвлета;
- k – целая величина, определяющая сдвиг вейвлета;
- m – целая величина: $m=0$, вычисляется отцовский вейвлет $\varphi_{j,k}(x)$; $m=1$, вычисляется материнский вейвлет $\psi_{j,k}(x)$;

- s – переменная, задающая семейство вейвлетов с использованием следующих обозначений:

$daublet(n)$ – n – коэффициентный вейвлет Добеши (n – четные числа от 2 до 20);

$coiflet(n)$ – n – коэффициентный вейвлет Койфлета ($n \in [6, 12, 18, 24, 30]$).

На рис. 3.5 показаны фрагменты документа MathCAD, в котором вычисляются с использованием функции *wavelet* значения вейвлетов Добеши с числом коэффициентов $m=4$: отцовских $\varphi(x)$, $\varphi(x-1)$ и материнских $\psi(x)$, $\psi(x-1)$. В этом же документе приведены графики этих вейвлетов (для удобства отображения графики материнских вейвлетов сдвинуты вниз на величину 2). Принятая нумерация графиков: 1 – $\varphi(x)$; 2 – $\varphi(x-2)$; 3 – $\psi(x)$; 4 – $\psi(x-2)$.

В качестве иллюстрации эффекта масштабирования на рис. 3.6 приведены графики тех же вейвлетов Добеши, но масштабированных при $j=+1$, т.е. графики $\varphi(x/2)$, $\varphi(x/2-1)$, $\psi(x/2)$, $\psi(x/2-1)$. Видно, что масштабированные вейвлеты представляют собой «растянутые» версии исходных вейвлетов. При отрицательных значениях j происходит «сжатие» вейвлетов.

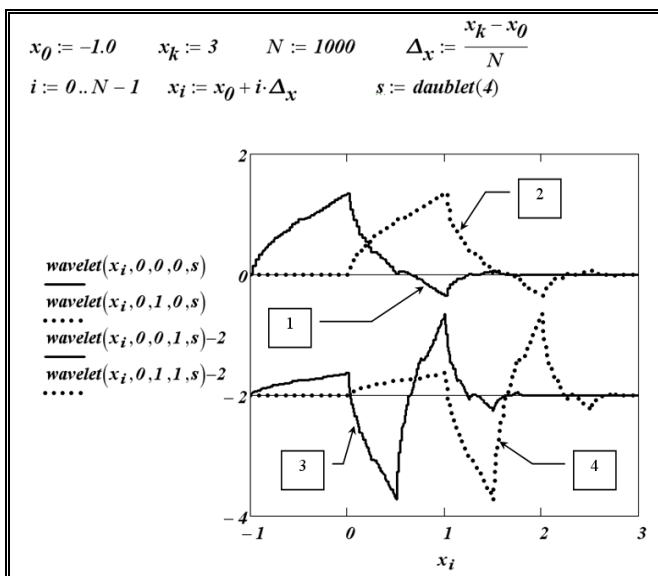


Рис. 3.5. Графики не масштабированных вейвлетов Добеши

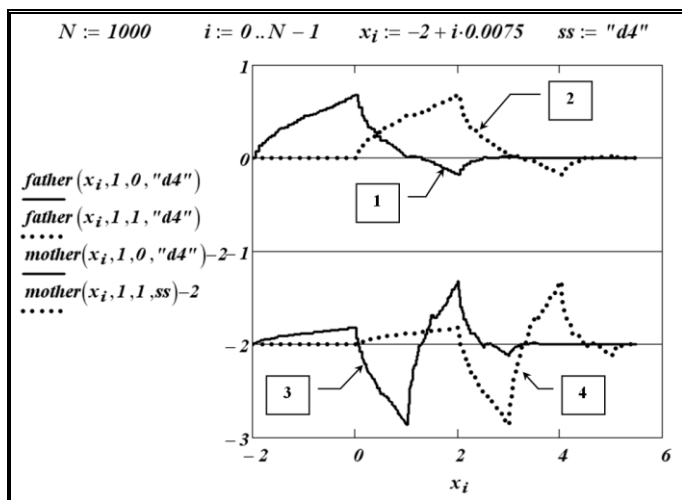


Рис. 3.6. Графики масштабированных вейвлетов Добеши

Алгоритмы вейвлет-фильтрации основаны на следующих свойствах вейвлет-разложения:

- информация о «точном» сигнале $f(x)$ содержится только в небольшом количестве коэффициентов вейвлет-разложения (*информативные коэффициенты*). Остальные коэффициенты равны нулю, либо незначительно отличаются от нуля по абсолютной величине и их можно назвать *незначимыми* (шумовыми) коэффициентами разложения. Это свойство также широко используется для сжатия сигналов и изображений;

- шум измерения равномерно «перераспределяется» по всем коэффициентам вейвлет-разложения. В частности, если значения шума η_i не коррелированы и имеют одинаковую дисперсию σ^2 , то коэффициенты разложения этого шума по базису ортогональных вейвлетов также не коррелированы между собой и имеют одинаковую дисперсию.

Иллюстрацией этих двух свойств является следующий пример.

Пример 3.3.1. В качестве значений точной и зашумленной функции примем значения, показанные на рис. 3.7. Необходимо вычислить детализирующие коэффициенты для уровней разложения $j=1,3,5$ с использованием ортогональных вейвлетов Добеши8.

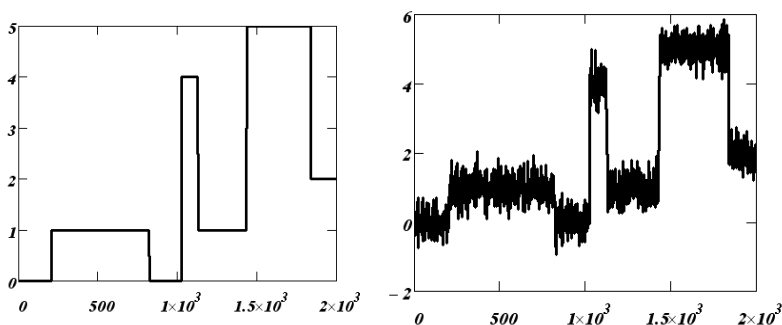


Рис. 3.7. Значения точной и зашумленной функций

Графики вычисленных детализирующих коэффициентов $d_{j,k}$, $\tilde{d}_{j,k}$ приведены на рис. 3.8 (точные значения функции) и на рис. 3.9 (зашумленные значения). При этом число детализирующих коэффициентов для уровня разложения $j=1$ равно

$$N_1 = \frac{N}{2} = \frac{2048}{2} = 1024, \quad \text{для уровня разложения } j=3 -$$

$$N_3 = \frac{N}{2^3} = \frac{2048}{8} = 256 \quad \text{и для уровня разложения } j=5 -$$

$$N_5 = \frac{N}{2^5} = \frac{2048}{32} = 64. \quad \text{Из анализа этих рисунков видно, что:}$$

- только небольшое число коэффициентов $d_{j,k}$ точной функции уровней разложения 1, 2, 3 отличны от нуля;
- особенно сильному искажению подвергаются детализирующие коэффициенты с небольшим уровнем разложения.

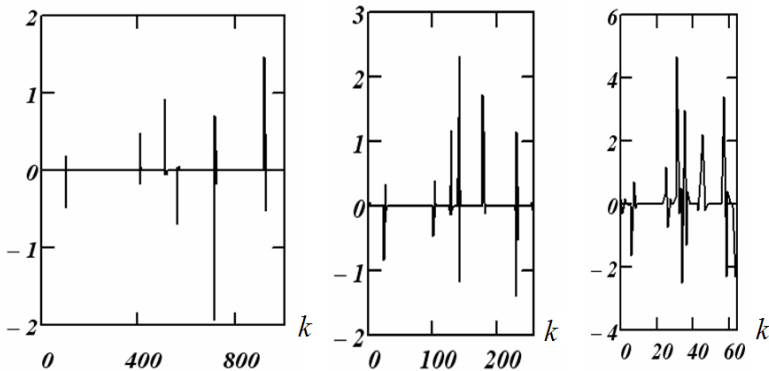


Рис. 3.8. Детализирующие коэффициенты точной функции

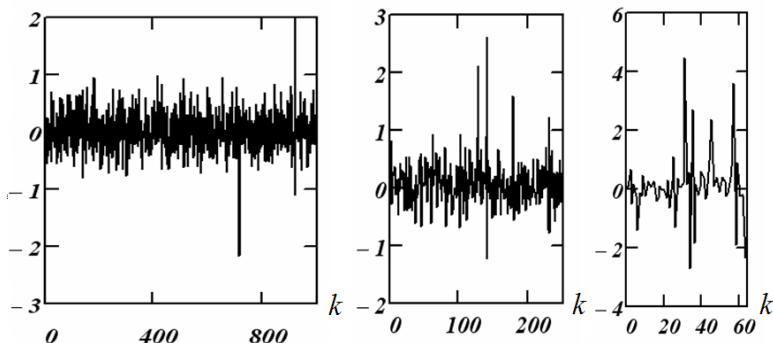


Рис. 3.9. Детализирующие коэффициенты зашумленной функции

Приведенные и проиллюстрированные свойства коэффициентов вейвлет-разложения определяют общий подход для построения алгоритмов фильтрации с использованием вейвлетов (в дальнейшем вейвлет-фильтрации):

для уменьшения уровня шума в исходных данных (т.е. для фильтрации шума) необходимо к коэффициентам разложения $\tilde{a}_{j,k}$, $\tilde{d}_{j,k}$ применить алгоритмы обработки, уменьшающие их дисперсию, а затем от этих новых «отфильтрованных» коэффициентов разложения взять обратное вейвлет-преобразование.

Таким образом, алгоритм вейвлет-фильтрации включает три следующих этапа:

- взятие прямого вейвлет-преобразования от зашумленных значений функции;
- обработка коэффициентов разложения $\tilde{a}_{j,k}$, $\tilde{d}_{j,k}$ (построение оценок $\hat{a}_{j,k}$, $\hat{d}_{j,k}$ для точных неизвестных коэффициентов $a_{j,k}$, $d_{j,k}$);
- взятие обратного вейвлет-преобразования от коэффициентов $\hat{a}_{j,k}$, $\hat{d}_{j,k}$.

В пороговых алгоритмах вейвлет-фильтрации на втором этапе используются так называемые пороговые функции, реализующие следующий алгоритм обработки: *коэффициент разложения меньший по абсолютной величине некоторой пороговой величины зануляется, в противном случае коэффициент сохраняется или подвергается некоторому (в общем случае нелинейному) преобразованию.*

Замечание 3.3.1. Показано (см. [27], стр. 58-60), что относительные погрешности аппроксимирующих коэффициентов на порядок и более меньше погрешностей коэффициентов $\tilde{d}_{j,k}$. Поэтому на практике обработке подвергаются только детализирующие коэффициенты $\tilde{d}_{j,k}$. ♦

Распространение на практике получили однопараметрические пороговые функции, зависящие только от одного параметра – величина порога (подробнее см. [27]). Для предфильтрации шумов входного и выходного сигналов идентифицируемой системы можно использовать две функции, которые эффективно удаляют шумы различной статистической природы (подробнее см. [28,29,30,31]):

- «жесткая» пороговая функция вида:

$$T_H(\tilde{d}_{j,k}, \lambda) = \begin{cases} 0, & \text{если } |\tilde{d}_{j,k}| \leq \lambda; \\ \tilde{d}_{j,k}, & \text{если } |\tilde{d}_{j,k}| > \lambda \end{cases}, \quad (3.3.5)$$

- пороговая функция $T_{HYP}(\tilde{d}, \lambda)$ вида:

$$T_{HYP}(\tilde{d}_{j,k}, \lambda) = \begin{cases} \text{sign}(\tilde{d}_{j,k}) \cdot \sqrt{|\tilde{d}_{j,k}|^2 - \lambda^2}, & \text{если } |\tilde{d}_{j,k}| \geq \lambda, \\ 0, & \text{если } |\tilde{d}_{j,k}| < \lambda. \end{cases} \quad (3.3.6)$$

где λ – величина порога. Графики этих функций (вычисленные при $\lambda = 1$) показаны на рисунке 3.10 (сплошная кривая – функция (3.3.5), штриховая – функция (3.3.6)).

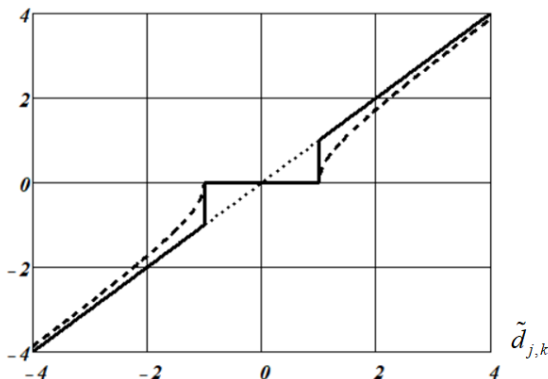


Рис. 3.4. Графики пороговых функций (3.3.5), (3.3.6)

В операторном виде алгоритм вейвлет-фильтрации можно представить в виде:

$$\hat{f}_\lambda = W^{-1} \left[T_\lambda (W \tilde{f}) \right], \quad (3.3.7)$$

где W, W^{-1} – операторы прямого и обратного вейвлет-преобразования, $T_\lambda(\cdot)$ – оператор, реализующий пороговый алгоритм обработки коэффициентов вейвлет-разложения при заданном пороге λ и выбранной пороговой функции, $\tilde{f}$ – дискретный зашумленный сигнал (вектор), сформированный из значений «зашумленной» функции $\hat{f}(t)$, $\hat{f}_\lambda$ – результат вейвлет-фильтрации (тоже вектор). Предполагается, что $\tilde{f} = f + \eta$, где f – «точный» вектор, η – вектор шума измерения с нулевым средним и дисперсией σ_η^2 .

Выбор пороговой величины существенно влияет на ошибку фильтрации и эта пороговая величина, по сути, является управляющим параметром алгоритмов вейвлет – фильтрации. Очевидно, что хотелось бы найти оптимальное пороговое значение λ_{opt} , которое минимизирует среднеквадратическую ошибку

филтрации. Заметим, что алгоритм вейвлет-филтрации является нелинейным, но тем не менее для оценки оптимального порога вновь обратимся к критерию оптимальности линейного алгоритма филтрации. Приведем основные соотношения алгоритма выбора, построенного на основе этого критерия и позволяющего достаточно точно (в отличие от других алгоритмов выбора пороговой величины) оценить λ_{opt} (подробнее см. [23,24,32,33,97,98,100,101]).

Введем статистику:

$$\rho_W(\lambda) = \frac{1}{\sigma_\eta^2} \cdot \langle e_\lambda, \tilde{f} \rangle,$$

где $\langle e_\lambda, \tilde{f} \rangle$ – скалярное произведение двух векторов, $e_\lambda = \tilde{f} - \hat{f}_\lambda$ – вектор невязки. В качестве оценки для λ_{opt} принимается величина λ_W , для которой выполняется неравенство:

$$\mathcal{G}_{N,\beta/2} \leq \rho_W(\lambda_W) \leq \mathcal{G}_{N,1-\beta/2}, \quad (3.3.8)$$

где $\mathcal{G}_{N,\beta/2}$ и $\mathcal{G}_{N,1-\beta/2}$ – квантили χ^2 -распределения с числом степеней свободы N уровней $\beta/2$, $1-\beta/2$ соответственно, N – число значений фильтруемой функции, $\beta = 0.05$ – вероятность ошибки первого рода при проверке статистической гипотезы об оптимальности пороговой величины (подробнее см. [27]). Как показали проведенные исследования [27] увеличение среднеквадратической ошибки филтрации при $\lambda = \lambda_W$ по сравнению с $\lambda = \lambda_{opt}$ не превышает 10%, что позволяет сделать вывод о высокой точности оценивания оптимальной пороговой величины λ_{opt} .

Замечание 3.3.2. Если $N > 30$, то границы интервала (3.3.8) при $\beta = 0.05$ можно вычислить по формулам:

$$\mathcal{G}_{N,0.025} = N - 1.96\sqrt{2N}, \quad \mathcal{G}_{N,0.975} = N + 1.96\sqrt{2N}. \quad \blacklozenge \quad (3.3.9)$$

Замечание 3.3.3. Кроме пороговых алгоритмов обработки коэффициентов вейвлет-разложения в последнее время стали использоваться так называемые мультипликативный алгоритмы вейвлет-фильтрации [33,35,102]. В этих алгоритмах для каждого коэффициента разложения вычисляется свой фильтрующий множитель, учитывающий «энергию» рядом стоящих коэффициентов разложения. Показано, что в ряде случаев мультипликативные алгоритмы имеют меньшую ошибку фильтрации по сравнению с пороговыми [33,35,102]. Свой фильтрующий множитель для каждого коэффициента разложения также вычисляется в локальных алгоритмах вейвлет-фильтрации из условия минимума среднеквадратической ошибки фильтрации (см. например, [20,20,26]). ♦

Замечание 3.3.4. Определённой альтернативой алгоритмам вейвлет-фильтрации является пространственно-локальная фильтрация, когда обрабатываются не коэффициенты вейвлет-разложения зашумленного сигнала, а сами зашумленные значения фильтруемого сигнала, попавшие в апертуру фильтра. Показано [19,21,99], что для некоторых распределений шума измерения пространственно-локальная фильтрация оказывается более предпочтительней. Кроме этого эту фильтрацию можно использовать для удаления артефактов, которые могут появиться после вейвлет-фильтрации [34,99]. ♦

3.3.3. *Исследования эффективности предфильтрации выходного сигнала*

Для ответа на вопрос об эффективности фильтрации выходного сигнала перед построением регуляризованного решения был проведен вычислительный эксперимент, в котором строились три регуляризованных решения:

1. Решение $\tilde{\kappa}_{\alpha_w} = F^{-1} \left\{ R_{\alpha_w} \left[F(\tilde{\varphi}), F(\tilde{f}) \right] \right\}$, в котором исходными данными являются зашумленные значения входного и выходного сигналов с относительными уровнями шумов δ_ξ , δ_η ,

а в качестве параметра регуляризации берется оценка α_W . Относительная ошибка этого решения определялась как:

$$\delta_{\tilde{k}_\alpha} = \frac{\|\tilde{k}_{\alpha_W} - \bar{k}^+\|}{\|\bar{k}^+\|}.$$

2. Решение $\hat{k}_{\alpha_W, \lambda_W} = F^{-1} \left\{ R_{\alpha_W} \left[F(\tilde{\varphi}), F(\hat{f}_{\lambda_W}) \right] \right\}$, где $\hat{f}_{\lambda_W}$ - результат предварительной фильтрации (3.3.7) выходного сигнала идентифицируемой системы, λ_W - пороговая величина, удовлетворяющая неравенству (3.3.8). Относительная ошибка этого

решения определялась как:
$$\delta_{\hat{k}_{\alpha, \lambda}} = \frac{\|\hat{k}_{\alpha_W, \lambda_W} - \bar{k}^+\|}{\|\bar{k}^+\|}.$$

3. Решение $\hat{k}_{\alpha_W}^{\delta_\lambda} = F^{-1} \left\{ R_{\alpha_W} \left[F(\tilde{\varphi}), F(\tilde{f}_{\delta_\lambda}) \right] \right\}$, где $\tilde{f}_{\delta_\lambda}$ - выходной сигнал, искаженный нормально распределенным «белым» шумом измерения с относительным уровнем, который определялся уровнем остаточной ошибки вейвлет-фильтрации

$$\delta_\lambda = \frac{\|\hat{f}_{\lambda_W} - f\|}{\|f\|}.$$

Другими словами, это решение позволяет

определить точность регуляризованного решения в случае, когда выходной сигнал системы искажен «белым» шумом, уровень которого равен величине δ_λ . Относительная ошибка

этого решения определялась как:
$$\delta_{\hat{k}_{\alpha, \delta}} = \frac{\|\hat{k}_{\alpha_W}^{\delta_\lambda} - \bar{k}^+\|}{\|\bar{k}^+\|}.$$

Так как приведенные относительные ошибки являются случайными величинами (зависят от конкретных реализаций шумов измерений), то по выборке объемом 50 были вычислены средние значения $\bar{\delta}_{\tilde{k}_\alpha}$, $\bar{\delta}_{\hat{k}_{\alpha, \lambda}}$, $\bar{\delta}_{\hat{k}_{\alpha, \delta}}$. Эти значения для ВХОД1 приведе-

ны в табл. 3.6. Для входного сигнала ВХОД2 результаты приведены в табл. 3.7.

Таблица 3.6

Уровень шума δ_η	Уровень «остаточного» шума δ_λ	Относительные ошибки решений		
		$\bar{\delta}_{\hat{k}_\alpha}$	$\bar{\delta}_{\hat{k}_{\alpha,\lambda}}$	$\bar{\delta}_{\hat{k}_{\alpha,\delta}}$
0.02	0.011	0.080	0.082	0.071
0.05	0.022	0.093	0.096	0.083
0.075	0.040	0.108	0.112	0.091
0.10	0.049	0.122	0.131	0.094
0.15	0.067	0.144	0.163	0.105

Таблица 3.7

Уровень шума δ_η	Уровень «остаточного» шума δ_λ	Относительные ошибки решений		
		$\bar{\delta}_{\hat{k}_\alpha}$	$\bar{\delta}_{\hat{k}_{\alpha,\lambda}}$	$\bar{\delta}_{\hat{k}_{\alpha,\delta}}$
0.02	0.013	0.064	0.072	0.051
0.05	0.029	0.091	0.999	0.072
0.075	0.041	0.106	0.115	0.082
0.10	0.051	0.117	0.134	0.090
0.15	0.072	0.140	0.165	0.103

Из анализа этих таблиц можно сделать вывод, что предварительная фильтрация выходного сигнала, искаженного нормально распределённым шумом не уменьшает ошибку регуляризованного решения по сравнению с ошибкой решения, вы-

численного по сигналу без его предфильтрации (особенно это видно в случае высокочастотного входного сигнала см. табл. 3.7). Этот факт можно объяснить тем обстоятельством, что вейвлет-фильтрация белого шума делает его «цветным» с существенной корреляцией между соседними отсчетами [40].

На рис. 3.5 приведены автокорреляционные функции исходного шума η_i выходного сигнала (сплошная кривая) и «остаточного» (после вейвлет-фильтрации) шума $\varepsilon_\lambda = \hat{f}_\lambda - f$ (точечная кривая). По оси абсцисс рисунка указана величина лага при вычислении значений автокорреляционной функции. Видна существенная корреляция между отсчетами остаточного шума, которая обуславливает трансформацию спектра шума в область низких частот, что обуславливает увеличение ошибки регуляризованного решения.

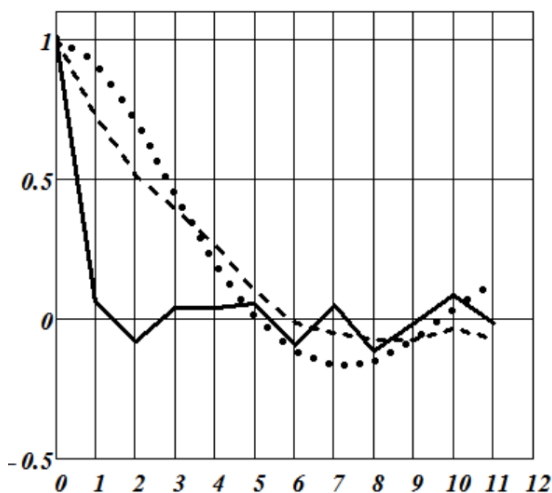


Рис. 3.5. Автокорреляционные функции шумов

Заметим, что аналогичную корреляцию вносит и медианный фильтр (штриховая кривая на рис. 3.5), используемый для фильтрации нормально распределенного шума с одинаковой

дисперсией. Однако применение этого фильтра становится необходимым при наличии в выходном сигнале аномальных измерений, обусловленных так называемым импульсным шумом. В этом случае вейвлет-фильтрация имеет низкую эффективность [36, 37], а применение медианного фильтра позволяет убрать аномальные измерения. Этот тезис подтверждают исследования, выполненные в работе [64].

Приведенные результаты (а также результаты экспериментов с другими формами входных сигналов) позволяют сделать важный вывод (для методов решения уравнений с разностным ядром) вывод, что ошибка регуляризованного решения при «цветном» шуме измерения выходного сигнала значительно выше (зависит от соотношения полос спектров шума и точной правой части), чем при «белом» шуме.

Следовательно, можно говорить *о нецелесообразности предварительной фильтрации выходного сигнала идентифицируемой системы, искаженного нормально распределенным шумом с одинаковой дисперсией*. При наличии аномальных измерений целесообразно использовать медианный фильтр, который хорошо фильтрует аномальные измерения при соответствующем выборе размера апертуры. Эти выводы можно обобщить на решение обратных измерительных задач с неточно заданной ИПФ измерительной системы.

3.3.4. Двухэтапный алгоритм идентификации при высоком уровне входного сигнала

Обобщая результаты предыдущих исследований, приходим к следующей схеме двухэтапного алгоритма идентификации:

Этап 1. Вейвлет-фильтрация входного сигнала идентифицируемой системы, т.е.

$$\hat{\varphi}_{\lambda_W} = W^{-1} \left[T_{\lambda_W} (W\tilde{\varphi}) \right]. \quad (3.3.10)$$

Этап 2. Построение регуляризованного решения, когда в качестве входного сигнала берется результат вейвлет-фильтрации на первом этапе.

В операторной форме эта схема идентификации отображается как:

$$\hat{k}_{\alpha_W, \lambda_W}^{(\varphi)} = F^{-1} \left\{ R_{\alpha_W} \left[F(\hat{\varphi}_{\lambda_W}), F(\tilde{f}) \right] \right\}. \quad (3.3.11)$$

Для ответа на вопрос об эффективности этой схемы идентификации был выполнен вычислительный эксперимент, в котором строились три регуляризованных решения:

- решение $\hat{k}_{\alpha_W}$, которое соответствует точному входному сигналу и зашумленному выходному сигналу с относительным уровнем шума измерения δ_η ;
- решение $\hat{k}_{\alpha_W}$, которое соответствует зашумленным входному сигналу и выходному сигналам с относительными уровнями шумов δ_ξ , δ_η соответственно и вычисляемое по схеме (3.3.2);
- решение $\hat{k}_{\lambda_W, \alpha_W}^{(\varphi)}$, вычисляемое по схеме (3.3.11).

Для всех трех решений определялась средние значения относительных ошибок идентификации (объем выборки был равен 50) при разных относительных уровнях шумов измерений δ_ξ , δ_η . Эти средние значения, вычисленные для ВХОД1 приведены в таблице 3.8.

В втором столбце таблицы приводятся средние значения относительной ошибки $\delta_{\hat{\varphi}} = \frac{\|\hat{\varphi}_{\lambda_W} - \varphi\|}{\|\varphi\|}$, что позволяет оценить эф-

фективность вейвлет-фильтрации зашумленного входного сигнала. В последнем столбце находятся средние значения коэффициента эффективности двухэтапного алгоритма идентификации

$$K_{eff} = \frac{\|\hat{k}_{\alpha_W} - \bar{k}^+\|}{\|\hat{k}_{\lambda_W, \alpha_W}^{(\varphi)} - \bar{k}^+\|}, \quad \text{который показывает во сколько раз}$$

уменьшается относительная ошибка двухэтапного алгоритма идентификации по сравнению с относительной ошибкой «традиционного» регуляризованного решения (????).

Таблица 3.8

Уровни шума			Относительные ошибки идентификации			Коэффициент K_{eff}
δ_ξ	$\delta_{\hat{\phi}}$	δ_η	$\hat{k}_{\alpha_W}$	$\hat{k}_{\alpha_W}$	$\hat{k}_{\lambda_W, \alpha_W}^{(\varphi)}$	
0.02	0.013	0.02	0.078	0.083	0,077	1.072
		0.05	0.097	0.099	0,095	1.041
		0.10	0.115	0.119	0,115	1.032
0.05	0.025	0.02	0.078	0.093	0,080	1.161
		0.05	0.097	0.104	0,100	1.042
		0.10	0.115	0.122	0,118	1.032
0.075	0.034	0.02	0.078	0.103	0,084	1.204
		0.05	0.097	0.111	0,103	1.074
		0.10	0.115	0.128	0,123	1.044
0.10	0.042	0.02	0.078	0.106	0,086	1.236
		0.05	0.097	0.119	0,109	1.096
		0.10	0.115	0.133	0,127	1.049
0.15	0.067	0.02	0.078	0.131	0,101	1.302
		0.05	0.097	0.134	0,116	1.158
		0.10	0.115	0.148	0,138	1.071

Заметим, что для входного сигнала ВХОД2 (высокочастотный сигнал) результаты были аналогичными, но значения коэффициента эффективности были на 10-15 % были ниже по сравнению с коэффициентами эффективности для сигнала ВХОД1.

Анализ результатов этой серии вычислительного эксперимента позволяет сделать следующие выводы:

1. Вейвлет-фильтрация входного сигнала существенно (более чем в два раза) уменьшает относительный уровень шума измерения этого сигнала, что позволяет в значительной степени

устранить влияние шума измерения входного сигнала на ошибку регуляризованного решения.

2. Если уровень шума входного сигнала соизмерим или меньше уровня шума измерения выходного сигнала, то выигрыш от применения предложенного двухэтапного алгоритма идентификации (14) не велик (порядка несколько процентов).

3. Если уровень шума входного сигнала значительно больше уровня шума измерения выходного сигнала, то выигрыш от применения предложенного двухэтапного алгоритма идентификации становится существенным и может достигать 25-30 % по сравнению с регуляризованным решением, построенного без предварительной фильтрации входного сигнала.

Поэтому предложенный двухэтапный алгоритм непараметрической идентификации целесообразно использовать при уровне шума измерения входного сигнала идентифицируемой системы, который в несколько раз превосходит уровень шума выходного сигнала. Это требует знаний соответствующих уровней шумов измерений. Так как на практике относительный уровень шума измерения часто бывает неизвестным, то для его оценивается можно обратиться к простой оценке (основанной на дискретном преобразовании Фурье), приведенной в пункте 2.5 и позволяющей с высокой точностью (порядка 4-6 %) определить эту числовую характеристику шума измерения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе приводятся два класса регуляризирующих алгоритмов идентификации импульсной переходной функции стационарной системы, вычислительными основами которых являются сглаживающие кубические сплайны и дискретное преобразование Фурье.

При построении этих алгоритмов существенно учитывался не только шум измерения выходного сигнала, но и шум измерения выходного сигналов идентифицируемой системы. Алгоритмы позволяют строить устойчивые решения задачи непараметрической идентификации при самой различной информации об искомой импульсной переходной функции. Использование дискретного преобразования Фурье и алгоритма быстрого преобразования Фурье как при построении регуляризированного решения, так и при выборе параметра регуляризации обуславливает высокую вычислительную эффективность приведенных алгоритмов идентификации.

Учет случайных шумов измерения входного и выходного сигналов идентифицируемой системы как при построении регуляризированного решения, так и при выборе параметра сглаживания или параметра регуляризации позволил сделать постановки задачи идентификации более близкими к используемым на практике схемам измерений.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Васин В. В.* Методы решения неустойчивых задач / В. В. Васин. – Екатеринбург : Наука, 1989. – 248 с.
2. *Васин В. В.* Некорректные задачи с априорной информацией / В. В. Васин, А. Л. Агеев. – Екатеринбург : Наука, 1993. – 264 с.
3. *Воскобойников Ю. Е.* Выбор параметра регуляризации и ошибки восстановления входного сигнала в методе статистической регуляризации / Ю. Е. Воскобойников // *Автометрия*. – 1975. – № 4. – С. 10–18.
4. *Воскобойников Ю. Е.* Построение сглаживающих кубических сплайнов при машинной обработке результатов эксперимента / Ю. Е. Воскобойников // *Автометрия*. – 1979. - № 4. – С. 110–117.
5. *Воскобойников Ю. Е.* Регуляризирующий алгоритм обращения уравнения Абеля / Ю. Е. Воскобойников // *Инженерно-физический журнал*. – 1980. – Т. 34, № 2. – С. 270–274.
6. *Воскобойников Ю. Е.* Выбор параметра регуляризации при решении обратных измерительных задач / Ю. Е. Воскобойников, Н. Г. Преображенский // *Автометрия*. – 1984. – № 2. – С. 31–38.
7. *Воскобойников Ю. Е.* Математическая обработка эксперимента в молекулярной газодинамике / Ю. Е. Воскобойников, Н. Г. Преображенский, А. И. Седельников. – Новосибирск : Наука, 1984. – 238 с.
8. *Воскобойников Ю. Е.* Частотный подход к оценке точности сглаживания и дифференцирования экспериментальных данных на основе сглаживающих сплайнов / Ю. Е. Воскобойников // *Автометрия*. – 1986. – № 1. – С. 38–43.
9. *Воскобойников Ю. Е.* Оценивание оптимального параметра регуляризирующего алгоритма восстановления изображений / Ю. Е. Воскобойников // *Автометрия*. – 1995. – № 3. – С. 64–72.
10. *Воскобойников Ю. Е.* Регуляризирующий алгоритм восстановления изображений с уточнением локальных отношений шум/сигнал / Ю. Е. Воскобойников, И. Н. Мухина // *Автометрия*. – 1999. – № 4. – С. 71–83.
11. *Воскобойников Ю. Е.* Численная реализация и сравнение четырех способов выбора параметра регуляризации в устойчивых алгоритмах деконволюции / Ю. Е. Воскобойников // *Научный вестник НГТУ*. – 2004. – № 2 (17). – С. 27–44 (электронная версия: www.ngasu.nsk.su/prikl/deconv04.html).
12. *Воскобойников Ю. Е.* Регуляризирующий алгоритм непараметрической идентификации при неточных исходных данных /

- Ю. Е. Воскобойников, В. А. Литасов // Научный вестник НГТУ. – 2005. – № 2 (20). – С. 33–45.
13. *Воскобойников Ю. Е.* Устойчивый алгоритм идентификации параметров эквивалентной схемы замещения электрического разряда / Ю. Е. Воскобойников, В. А. Литасов // Научный вестник НГТУ. – 2006. – № 4 (25). – С. 3–16.
14. *Воскобойников Ю. Е.* Устойчивый алгоритм восстановления изображения при неточно заданной аппаратной функции / Ю. Е. Воскобойников, В. А. Литасов // Автометрия. – 2006. – № 6. – С. 13–22.
15. *Воскобойников Ю. Е.* Устойчивые методы и алгоритмы параметрической идентификации : монография / Ю. Е. Воскобойников. – Новосибирск : НГАСУ (Сибстрин), 2006. – 186 с.
16. *Воскобойников Ю.Е.* Устойчивые алгоритмы решения обратных измерительных задач : монография / Ю. Е. Воскобойников. - Новосибирск: Изд-во НГАСУ. 2007. – 184 с.
17. Регуляризирующий алгоритм идентификации параметров схемы замещения электрического разряда Ч. I / Ю. Е. Воскобойников [и др.] // Известия Томского политехнического университета. – 2007. – Т. 310, № 1. – С. 79–82.
18. Регуляризирующий алгоритм идентификации параметров схемы замещения электрического разряда. Ч. II / Ю. Е. Воскобойников [и др.] // Известия Томского политехнического университета. – 2007. – Т. 310, № 2. – С. 73–77.
- Воскобойников Ю.Е.* Квазиоптимальный алгоритм оценивания коэффициентов вейвлет-разложений при фильтрации сигналов / Ю.Е. Воскобойников, А.В. Гочаков // Автометрия. 2009. –т. 45. - N 6. - Р. 13 - 19. УДАЛЯЕМ ЭТУ СТАТЬЮ!!!
19. Воскобойников Ю.Е., Литвинов Л.А. Локально-сглаживающий итерационный алгоритм восстановления контрастных изображений // Автометрия. 2008. –т. 44. - N 6. - Р. 13 - 25.
20. *Воскобойников Ю.Е.* Квазиоптимальный алгоритм оценивания коэффициентов вейвлет-разложений при фильтрации сигналов / Ю.Е., Воскобойников, А.В. Гочаков // Автометрия. 2010. –т. 46. - N 1. - Р. 34 - 45.
21. *Воскобойников Ю.Е.* Сравнение двух классов алгоритмов фильтрации изображений / Ю.Е. Воскобойников, А.В. Гочаков // Автометрия. 2010. –т. 46. - N 6. - Р. 14 - 25.
22. *Воскобойников Ю.Е.* Фильтрации сигналов и изображений: Фурье и вейвлет алгоритмы (с примерами в Mathcad) / Ю.Е. Воскобой-

- ников, А.В. Гочаков. Новосибирск: НГАСУ (Сибстрин), 2010. – 188 с.
23. *Воскобойников Ю.Е.* Построение алгоритмов вейвлет-фильтрации с двухпараметрическими пороговыми функциями / Ю.Е. Воскобойников, А.В. Гочаков // *Автометрия*. 2012. – т. 48. – N 1. – Р. 17 – 29.
24. *Воскобойников Ю.Е.* Оптимизация алгоритмов вейвлет-фильтрации с многопараметрическими пороговыми функциями / Ю.Е. Воскобойников // *Автометрия*. 2014. – т.50. – № 6.
25. *Воскобойников Ю.Е.* Вейвлет-фильтрация сигналов и изображений (с примерами в пакете MathCAD) / Воскобойников Ю.Е. Научная монография. Новосибирск. НГАСУ(Сибстрин). 2015. 188 с.
26. *Воскобойников Ю.Е.* Двухэтапный квазиоптимальный алгоритм вейвлет-фильтрации сигналов и изображений / Ю.Е. Воскобойников // *Автоматика и программная инженерия*. 2015. – №1 (11). – с. 81-89.
27. *Воскобойников Ю.Е.* Алгоритмы вейвлет-фильтрации (с примерами в пакете MathCAD) / Ю.Е. Воскобойников. Научная монография. Изд-во Palmarium Academic Publishing, 2016. 196 с.
28. *Воскобойников Ю.Е.* Вейвлет-фильтрация с двухпараметрическими пороговыми функциями: выбор функции и оценивание оптимальных параметров / Ю.Е. Воскобойников // *Автоматика и программная инженерия*. 2016, №1(15)
29. *Воскобойников Ю.Е.* Выбор наилучшей однопараметрической пороговой функции в алгоритмах вейвлет-фильтрации / Ю.Е. Воскобойников, Д.А. Крысов // *Сборник научных трудов НГТУ* . – 2016. – № 3(85). С. 71-82.
30. Ю.Е. Воскобойников, Д.А. Крысов. Выбор наилучшей двухпараметрической пороговой функции в алгоритмах вейвлет-фильтрации // *Автоматика и программная инженерия*. 2016, №3(17) . С. 91-98.
31. *Воскобойников Ю.Е.* Исследование потенциальной точности пороговых алгоритмов вейвлет-фильтрации шумов различной статистической природы / Ю.Е. Воскобойников, Д.А. Крысов. // *Автоматика и программная инженерия*. 2016, №4(18) . С. 67-76.
32. *Воскобойников Ю.Е.* Статистический подход к оцениванию оптимальных параметров в пороговых алгоритмах вейвлет-фильтрации // В кн. Системы автоматического управления, ме-

- хатроники и робототехники. Коллективная монография. – Новосибирск: НГТУ. – 2016. С. 151-180.
33. *Воскобойников Ю.Е.* Оценивание оптимальных параметров одного класса мультипликативных алгоритмов вейвлет-фильтрации изображений / Ю.Е. Воскобойников // *Автометрия*» 2017, т. 53, № 4. С. 112-119.
34. *Воскобойников Ю.Е.* Эффективный метод устранения артефактов вейвлет-фильтрации / Ю.Е. Воскобойников // *Фундаментальные исследования*. - 2017, № 8. - С. 246-250.
- Воскобойников Ю.Е.* Локальный регуляризирующий алгоритм непараметрической идентификации объекта с неточным входным сигналом / Ю.Е. Воскобойников, Д.А. Крысов. // *Научный вестник НГТУ* том 70, № 1, 2018, с. 19–38 УДАЛИТЬ ЭТУ ЛИТЕРАТУРУ.
35. *Воскобойников Ю.Е.* Построение одного класса мультипликативных алгоритмов вейвлет-фильтрации изображений // *Автоматика и программная инженерия*. 2017, №1(19) . С. 35-44.
36. *Воскобойников Ю.Е.* Вейвлет-фильтрация шумов различной статистической природы / Ю.Е. Воскобойников, Д.А. Крысов // *Современные наукоемкие технологии*. – 2018. – № 6. – С. 50-54.
- Воскобойников Ю.Е.* Алгоритм идентификации импульсной переходной функции при высоком уровне шума измерения входного сигнала системы / Ю.Е. Воскобойников, Д.А. Крысов // *Автоматика и программная инженерия*. – 2018. - № 2(24). – С. 67-74. УДАЛИТЬ ЭТУ ЛИТЕРАТУРУ
37. *Воскобойников Ю.Е.* Фильтрация аномальных измерений - какой алгоритм лучше? // *Труды НГАСУ*. - 2018. - № 4. С.
38. *Воскобойников Ю.Е.* Оценивание характеристик шума измерения в модели «сигнал+шум» / Ю.Е. Воскобойников, Д.А. Крысов // *Автоматика и программная инженерия*. – 2018. - № 3(25).
39. *Воскобойников Ю.Е.* Свойства регуляризованных решений обратной измерительной задачи при неточных характеристиках измерительной системы / Ю.Е. Воскобойников, В.А. Боева // *Труды Новосибирского государственного архитектурно-строительного университета (Сибстрин)*. - 2018. Т. 20. № 3 (66). С. 123-137.
40. *Воскобойников Ю.Е.* Исследование эффективности предфильтрации выходного сигнала при непараметрической идентификации

- кации / Ю.Е. Воскобойников, В.А. Боева // Автоматика и программная инженерия. – 2018. - № 4(26).
41. *Воскобойников Ю.Е.* Алгоритм идентификация импульсной переходной функции при высоком уровне шума измерения входного сигнала системы / Ю.Е. Воскобойников, Д.А. Крысов // Автоматика и программная инженерия. 2018, №2(24).
 42. *Воскобойников Ю.Е.* Локальный регуляризирующий алгоритм непараметрической идентификации объекта с неточным входным сигналом /Ю.Е. Воскобойников, Д.А. Крысов // Научный вестник НГТУ. – 2018. – т. 70. - № 1. – С. 19-38.
 43. *Воскобойников Ю.Е.* Двухэтапный устойчивый алгоритм непараметрической идентификации системы с высоким уровнем шума входного сигнала / Ю.Е. Воскобойников, Д.А. Крысов // Научный вестник НГТУ. – 2019. – т. 74. - № 1. – С. 21-40.
 44. *Воскобойников Ю.Е., Боева В.А.* Новый устойчивый алгоритм непараметрической идентификации технических системы // Современные наукоемкие технологии. 2019. - № 5. – С. 44-50.
 45. *Гоулд Б.* Теория и применение цифровой обработки сигналов / Б. Гоулд, Л. Рабинер. – М. : Мир, 1975. – 847 с.
 46. *Гончарский А. В.* О регуляризации некорректных задач с приближенно заданным оператором / А. В. Гончарский, А. С. Леонов [и др.] // ЖВМиМФ. – 1974. – Т. 14, № 4. – С. 1022–1027.
 47. *Гончарский А. В.* Обобщенный принцип невязки / А. В. Гончарский, А. С. Леонов // ЖВМиМФ. – 1973. – Т. 13, № 2. – С. 294–302.
 48. *Гордонова В. И.* Численные алгоритмы выбора параметра регуляризации / В. И. Гордонова, В. А. Морозов // ЖВМиМФ. – 1973. – Т. 13, № 3.
 49. *Дейч А. М.* Методы идентификации динамических систем/ А. М. Дейч. – М. : Энергия, 1979. – 240 с.
 50. *Завьялов Ю. С.* Методы сплайн-функций / Ю. С. Завьялов, Б. И. Квасов, В. Л. Мирошниченко. – М. : Наука, 1980. – 345 с.
 51. *Иванов В. К.* Теория линейных некорректных задач и ее приложения / В. К. Иванов, В. В. Васин, В. П. Танана. – М. : Наука, 1978. –
 52. *Лаврентьев М. М.* Линейные операторы и некорректные задачи / М. М. Лаврентьев, Л. Я. Савельев. – М. : Наука, 1991. – 331 с.
 53. *Леонов А. С.* О критериях выбора параметра регуляризации при решении некорректных задач / А. С. Леонов // Сб. под ред. А. Н. Тихонова. – Новосибирск : Наука, 1982. – С. 77–84.

54. *Леонов А. С.* Метод L-кривой всегда дает неустранимую систематическую ошибку / А. С. Леонов, А. Г. Ягола // Вестник МГУ. Сер. 3. Физика, астрономия. – 1997. – № 6. – С. 17–19.
55. *Леонов А. С.* Можно ли решить некорректно поставленную задачу без знания погрешностей данных? / А. С. Леонов, А. Г. Ягола // Вестник МГУ. Сер. 3. Физика, астрономия. – 1995. – № 4. – С. 28–32.
56. *Морозов В. А.* О принципе невязки при решении операторных уравнений методом регуляризации / В. А. Морозов // ЖВМиМФ. – 1968. – Т. 8, № 2. – С. 295–309.
57. *Морозов В. А.* Об эффективном численном алгоритме построения псевдорешения / В. А. Морозов // ЖВМиМФ. – 1971. – Т. 11, № 1. – С. 38–44.
58. *Морозов В. А.* Регулярные методы решения некорректно поставленных задач / В. А. Морозов. – М. : Наука, 1987. – 240 с.
59. *Морозов В. А.* Методы решения некорректно поставленных задач: алгоритмический аспект / В. А. Морозов, А. И. Гребенников. – М. : Изд-во МГУ, 1992. – 319 с.
60. *Мухина И. Н.* Дескриптивный регуляризирующий алгоритм решения плохо обусловленных систем уравнений / И. Н. Мухина // Труды НГАСУ. – 1999. – Т. 2, № 1 (4). – С. 11–16.
61. *Мухина И. Н.* Нелинейный регуляризирующий алгоритм решения плохо обусловленных систем алгебраических уравнений / И. Н. Мухина // Труды НГАСУ. – 1998. – Т. 1, № 1 (1). – С. 119–122.
62. *Сизиков В. С.* Математические методы обработки результатов измерений / В. С. Сизиков. – СПб. : Политехника, 2001. – 240 с.
63. *Сизиков В. С.* О способах невязки при решении некорректных задач / В. С. Сизиков // ЖВМиМФ. – 2003. – Т. 43, № 9. – С. 1294–1312.
64. *Сизиков В.С.* Определение параметров искажений изображений спектральным способом в задаче обработки снимков поверхности Земли, полученных со спутников и самолётов / В.С. Сизиков, А. В. Степанов // Оптический журнал. – 2018. – т. 85. - №4. С. 19-26.
65. *Титаренко В. Н.* Применение метода GVC для корректных и некорректных задач / В. Н. Титаренко, А. Г. Ягола // Вестник МГУ. Сер. 3. Физика, астрономия. – 2000. – № 4. – С. 15–18.
66. *Тихонов А. Н.* Методы решения некорректных задач / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. – М. : Наука, 1986. – 285 с.

67. *Тихонов А. Н.* Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация / А. Н. Тихонов, А. В. Гончарский, В. В. Степанов. – М. : Наука, 1988. – 198 с.
68. *Тихонов А. Н.* Численные методы решения некорректных задач / А. Н. Тихонов, А. В. Гончарский, В. В. Степанов. – М. : Наука, 1990. – 231 с.
69. *Турчин В. Ф.* Использование методов математической статистики для решения некорректных задач / В. Ф. Турчин, В. П. Козлов // Успехи физических наук. – 1970. – Т. 102, № 3. – С. 345–386.
70. *Федотов А. М.* Некорректные задачи со случайными ошибками в данных / А. М. Федотов. – Новосибирск : Наука, 1990. – 279 с.
71. *Ягола А. Г.* Некорректно поставленные задачи с приближенно заданным оператором / А. Г. Ягола ; под ред. А. Н. Тихонова. – Новосибирск : Наука, 1982. – 186 с.
72. *Ягола А. Г.* О выборе параметра регуляризации по обобщенному принципу невязки / А. Г. Ягола // ДАН. – 1979. – Т. 245, № 1. – С. 37–39.
73. *Bertero M.* Regularized and positive-constrained inverse methods in the problem of object restoration / M. Bertero, V. Dovi // Opt. Act. – 1981. – V. 28, № 12. – P. 1635–1649.
74. *Engl H. W.* A posteriori parameter choice methods for general methods for solving linear ill-posed problems / H. W. Engl, H. Gfrerer // Appl. Numer. Math. – 1988. – № 4. – P. 395–417.
75. *Engl H. W.* Using the L-curve for determining optimal regularization parameter / H. W. Engl, H. Gfrerer // Appl. Numer. Math. – 1994. – № 69. – P. 25–31.
76. *Engl H. W.* A regularization of inverse problems / H. W. Engl, M. Hanke, F. Neubauer. – Kluwer Academic Publisher, 2000. – 383 с.
77. *Galatsanos N.P.* Methods for choosing the regularization parameter for estimating the noise variance in image restoration / N. P. Galatsanos, A. K. Katsaggelos // IEEE Trans. Image Processing. – 1992. – V. 1, № 3. – P. 322 – 336.
78. *Golub G. H.* Generalized cross validation as a method for choosing a good ridge parameter / G. H. Golub, M. Heath, G. Wahba // Technometrics. – 1979. – V. 21. – P. 215–222.
79. *Graven C.* Smoothing noisy data with spline functions: estimating the correct degree of smoothing by the method of generalized cross validation / C. Graven, G. Wahba // Numer. Math. – 1979. – V. 31, № 3. – P. 377–403.

80. *Greblicki W.* Nonparametric system identification. W. Greblicki, M. Pawiak. – Cambridge University Press, 2008. – 400 p.
81. *Hadamard J.* Le probleme de Cauchy et les eguations aux derives particelee lineaires hyperbolique / J. Hadamard. – Paris : Hermann, 1932.
82. *Hansen P. C.* Analysis of discrete ill-posed problems by means of the L-curve / P. C. Hansen // SIAM Review. – 1999. – V. 34. – P. 561–580.
83. *Hansen P. C.* The use of the L-curve in the regularization of discrete ill-posed problems / P. C. Hansen, D. P. O’Leary // SIAM J. Sci. Comput. – 1993. – V. 14, № 8. – P. 1487–1503.
84. *Kaipio J. P.* Statistical and computational inverse problems / J. P. Kaipio, E. Somersalo. – Springer-Verlag, 2004. – 327 p.
85. *Lukas M. A.* Comparison of parameter choice methods for regularization with discrete noisy data / M. A. Lukas // Inverse Problem. – 2000. – V. 14, № 2. – P. 161–184.
86. *Mallat S.* Multiresolution approximation and wavelet orthonormal bases of $L^2(\mathbb{R})$ // Trans. AMS. – 1989. – Vol. 315, № 1. – P. 69–87.
87. *Mallat S.* A theory of multiresolution signal decomposition: the wavelet representation // IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell. – 1989. – Vol. 11, № 9. – P. 674–693.
88. *Reeves S. J.* Optimal estimation of the regularization parameter and stabilizing functional for regularized image restoration / S. J. Reeves, R. M. Mersereau // Optical Engineering. – 1990. – V. 29, № 5. – P. 446–457.
89. *Reginska T.* A regularization parameter in discrete ill-posed problems / T. Reginska // SIAM J. Sci. Comput. – 1996. – V. 17, № 6. – P. 740–749.
90. *Vogel C. R.* Non-convergence of L-curve regularization parameter selection method / C. R. Vogel // Inverse Problems. – 1996. – V. 12, № 4. – P. 535–547.
91. *Voskoboinikov Yu. E.* Estimating the optimal parameter of regularizing algorithms for image restoration / Yu. E. Voskoboinikov // Optoelectronics, Instrumentations and Data Processing. – 1995. – № 3. – P. 64.
92. *Voskoboinikov Yu. E.* Regularizing algorithm of signals and images restoration with specification of the local relations noise/signal / Yu. E. Voskoboinikov, I. N. Mukhina // Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing. – 1999. – № 4. – P. 71–82.
93. *Voskoboinikov Yu. E.* Local regularizing algorithm for high-contrast image and signal restoration / Yu. E. Voskoboinikov, I. N. Mukhina //

- Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing. – 2000. – № 3. – P. 41–48.
94. *Voskoboinikov Yu. E.* Choice of the regularization parameter at unknown noise level / Yu. E. Voskoboinikov // Proceedings of the International Conference «Ill-posed and Inverse Problems». – Novosibirsk, 2003. – C. 32–35.
 95. *Voskoboinikov Yu. E.* A stable image reconstruction algorithm for inexact point-spread function / Yu. E. Voskoboinikov, V. A. Litusov // Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing. – 2005. – V. 42, № 6. – P. 3–12.
 96. *Voskoboinikov Yu. E.* Local regularizing deconvolution algorithm with noise kernel / Yu. E. Voskoboinikov // Тр. Междунар. конференции «Тихонов и современная математика». – М. : Изд-во МГУ, 2006. – С. 73–78.
 97. *Voskoboinikov Yu. E.* Quasi-optimal estimation algorithm of wavelet-decomposition coefficients at a signals filtration / Yu. E. Voskoboinikov A.V. Gochakov // Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing, 2009. - v.45. - N 6. - P. 13 - 18.
 98. *Voskoboinikov Yu. E.* Quasi-optimal estimation algorithm of wavelet-decomposition coefficients at a signals filtration / Yu. E. Voskoboinikov, A.V. Gochakov. // Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing, 2010. - v.46. - N 1. - P. 34 - 45.
 99. *Voskoboinikov Yu. E.* Comparison of two classes of a image filtration algorithms / Yu. E. Voskoboinikov, A.V. Gochakov // Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing, 2010. - v.46. - N 6. - P. 14 - 25.
 100. *Voskoboinikov Yu. E.* Construction of a wavelet-filtration algorithms with two-parametrical threshold functions / Yu. E. Voskoboinikov, A.V. Gochakov // Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing, 2012. - v.48. - N 1. - P. 17- 27.
 101. *Voskoboinikov Yu.E.* Optimization of wavelet-filtration algorithms with multiple parameter threshold functions / Yu.E. Voskoboinikov // Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing, 2014. - v.50. - N 6.
 102. *Voskoboinikov Yu.E.* Estimation of optimal parameters a class of multiplicative algorithms wavelet filtration of images /Yu.E. Voskoboinikov // Optoelectronics, Instrumentation and Data Processing. - 2017. - v.53. № 4.
 103. *Voskoboinikov Yu. E.* A stabilized algorithm of nonparametric identification for a system with high-level noise measurement of input signal / Voskoboinikov Yu. E. Krysov D.A. // Proceeding 14th International

- Scientific-Technical Conference APEIE. Novosibirsk. -2018 - P. 295-300.
104. *Wahba G.* Smoothing noisy data with spline functions / G. Wahba // Numer. Math. – 1975. – V. 24, № 2. – P. 383–393.
105. *Urmanov A.M.* Information complexity-based regularizing parameter selection for solution of ill-posed inverse problems / A. M. Urmanov, A. V. Gribok, H. Bozdogan, J. W. Hines, R. E. Uhrig // Inverse problems. – 2002. – V. 18, № 3.

СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРЕ

Воскобойников Юрий Евгеньевич

заведующий кафедрой прикладной математики Новосибирского государственного архитектурно-строительного университета (Сибстрин), д-р физ.-мат. наук, профессор, Соросовский профессор, заслуженный работник высшей школы РФ (e-mail: voscob@mail.ru)